



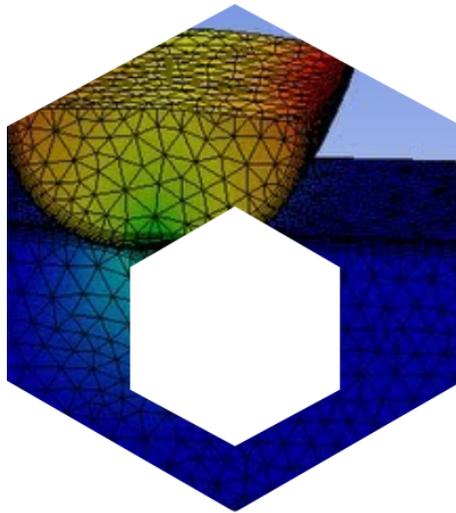
# THÉORIE DE HERTZ

Cours

CPGE

v1.2

*Lycée Jean Zay - 21 rue Jean Zay - 63300 Thiers - Académie de Clermont-Ferrand*



## Compétences visées:

**B2-22**

Associer le modèle du solide déformable localement en surface au comportement de solides en contact.

**B2-23**

Utiliser le modèle de Hertz (fourni) pour déterminer les déplacements et les pressions dans les contacts linéiques ou ponctuels.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>La théorie de Hertz</b>	<b>4</b>
2.1	Objectifs . . . . .	4
2.2	Hypothèses . . . . .	4
2.3	Modélisation des déformations, zone de contact . . . . .	4
2.4	Critères de dimensionnement . . . . .	5
2.4.1	Pression de contact . . . . .	5
2.4.2	Contrainte tangentielle . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Quelques résultats classiques</b>	<b>7</b>
3.1	Contact ponctuel . . . . .	7
3.2	Contact rectiligne . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Résultats généralisés</b>	<b>8</b>

## 1 Introduction

Lorsqu'on presse une sphère « dure » sur un plan constitué d'un matériau « mou », on constate une déformation localisée autour du point théorique de contact, ainsi qu'une augmentation de la surface réelle de contact (FIGURE 1).

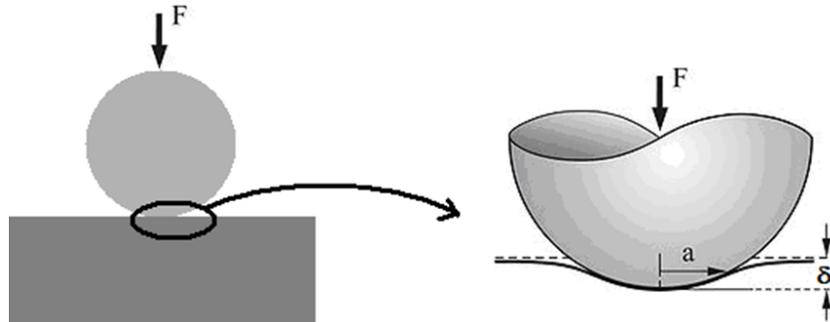


FIGURE 1 – Déformation locale

C'est en se basant sur l'observation de ce phénomène à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle qu'Heinrich Rudolf Hertz a développé les méthodes d'analyse et de calcul qu'on abordera dans ce cours.

Bien qu'un certain nombre d'études aient depuis affiné et complété les travaux initiaux de Hertz, les méthodes développées alors permettent encore aujourd'hui d'arriver assez rapidement à des résultats relativement fiables.

Ainsi, on pourra déterminer, pour un contact nominale non surfacique, la contrainte dans la zone de contact en fonction des paramètres que sont la force appliquée, la géométrie locale autour du contact et les caractéristiques mécaniques des matériaux. La théorie du contact de Hertz permet également de fournir le déplacement sous charge de l'élément géométrique nominal associé au contact (un point, une ligne). Cette application est cependant plus rare.

On trouve ce type de contact dans de nombreuses parties mécaniques parmi lesquelles on peut citer en particulier les roulements et les engrenages (voir FIGURE 2). Pour ces technologies les forces de contact sont cycliques et entraînent à la longue la fatigue des matériaux et l'apparition de fissures sous la surface. Ainsi la théorie du contact de Hertz constitue le fondement des équations pour le calcul du chargement admissible pour les roulements, les engrenages...



FIGURE 2 – Exemples d'application

Aujourd'hui, la puissance de calcul offerte par les moyens informatiques modernes permet d'affiner les résultats donnés par la théorie de Hertz pour tout type de contact, en faisant notamment appel aux méthodes de calcul par éléments finis.

## 2 La théorie de Hertz

### 2.1 Objectifs

Dans le cadre de l'étude de la réalisation technologique de liaisons sphère-plan (ponctuelle) ou cylindre-plan (linéaire rectiligne), la théorie de Hertz permet notamment de déterminer :

- les dimensions de la surface de contact commune aux deux solides ;
- leur rapprochement (déformations sous charge) ;
- la pression de contact maximale ;
- les contraintes principales en surface et en profondeur.

Ces résultats théoriques permettront d'effectuer alors des choix technologiques en vue de l'optimisation :

- du dimensionnement géométrique des surfaces (rayons de courbure, longueur de contact)
- du choix des matériaux et de leurs éventuels traitements thermiques.

### 2.2 Hypothèses

- Solides massifs : les déformations sont négligeables en dehors de la zone de contact ;
- Déformations élastiques (ie : réversibles) ;
- Pas de frottement au contact (pas d'effort tangentiel) ;
- Pas de mouvement relatif entre les deux solides :  $\vec{V}_{M \in 1/2} = \vec{0}$  et  $\vec{\Omega}_{1/2} = \vec{0}$

### 2.3 Modélisation des déformations, zone de contact

La FIGURE 3 indique le comportement observé pour un contact nominal ponctuel et convexe entre deux solides quelconques. Deux éléments sont observables et mesurables :

- une surface de contact elliptique et orientée d'une façon particulière, nouvel élément géométrique définissant le contact sous charge (dans le plan  $\pi$ , définie par  $a$ ,  $b$  et  $\varphi$ ). Voir FIGURE 4 ;
- le rapprochement de deux points de référence (pris sur chacun des solides dans les zones de déformation négligeable) :  $\delta = AB - A'B'$ .

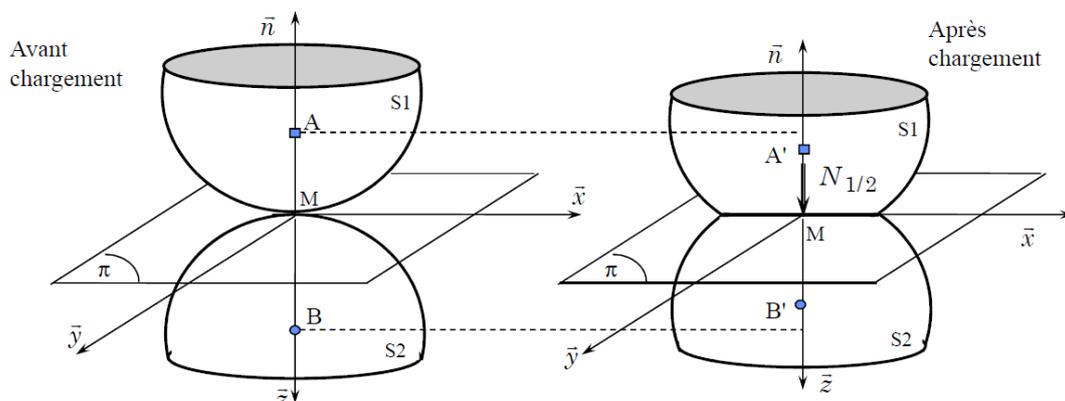


FIGURE 3 – Modélisation des déformations

La nature et les dimensions géométriques du contact sous charge ayant été établi, il est facile de calculer une pression moyenne de contact. Si cette dernière peut paraître suffisante pour une approche

des conditions de résistance mécanique elle ne le sera en réalité que si la pression varie peu sur la totalité de la surface de contact, le calcul de résistance de la matière devant être local pour être validé.

Des essais complémentaires permettent de mettre en évidence que **la répartition de pression se fait suivant un ellipsoïde** (voir FIGURE 5).

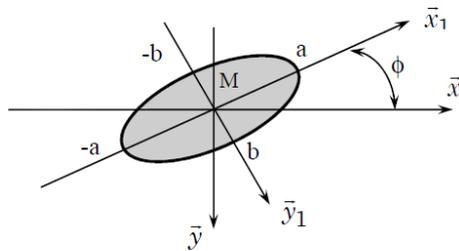


FIGURE 4 – Zone de contact

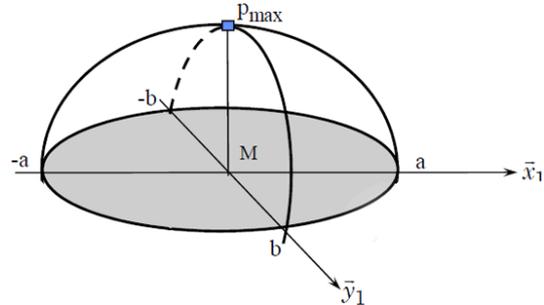


FIGURE 5 – Répartition de pression (ellipsoïde)

On détermine alors :  $p_{\text{moy}} = \frac{N_{1 \rightarrow 2}}{\pi ab}$  et  $p_{\text{max}} = \frac{3}{2} p_{\text{moy}} \Rightarrow p_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{N_{1 \rightarrow 2}}{\pi ab}$

## 2.4 Critères de dimensionnement

### 2.4.1 Pression de contact

La pression maximale  $p_{\text{max}}$  de contact est comparée à une pression de référence, selon matériaux et conditions d'emploi, et permet de dimensionner la géométrie des pièces autour de leur contact.

Dans les faits, ce critère de la pression au contact entre deux pièces s'avère parfois insuffisant pour dimensionner et également choisir les matériaux. Une analyse des contraintes internes au voisinage du contact peut se révéler nécessaire.

	$E$ (Mpa)	$\nu$	$p_{\text{adm}}$ (MPa)
Acier	200 000	0,3	600 à 700
Alu	80 000	0,35	350
Fonte	100 000	0,3	500
Bronze	130 000	0,35	100
Téflon	130 000	0,35	10

FIGURE 6 – Ordres de grandeur

### 2.4.2 Contrainte tangentielle

Des contraintes internes existent bien sûr dans les pièces en contact. Ces contraintes s'avèrent prépondérantes par rapport à celles en surface (pressions), pour un calcul de durée de vie du contact, dans le cas d'un chargement fréquentiel de ce dernier. On pense bien sûr alors aux roulements et engrenages comme exemples de ce cas de figure.

La contrainte tangentielle maximale ne se situe pas sur la surface de contact (contrairement à la

contrainte de compression, qui est la pression de contact sur la surface de contact).

Les formules suivantes ne sont valables que pour les matériaux métalliques pour lesquels  $\nu$  est voisin de 0,3 (la théorie de l'élasticité permettrait de le faire pour tous les matériaux).

La contrainte tangentielle maximale se situe à une profondeur  $h$  :  $h = 0,5 a$  (pour un contact ponctuel (voir tableau).

L'intensité maximale est :  $\tau_{\max} = 0,315 p_{\max}$  (au point  $C$ ; voir FIGURE 7).

La contrainte tangentielle est à comparer à la limite élastique de cisaillement  $R_{pg}$  proche de la limite élastique divisée par 2 du matériau :  $R_{pg} \approx \frac{R_{pe}}{2}$ .

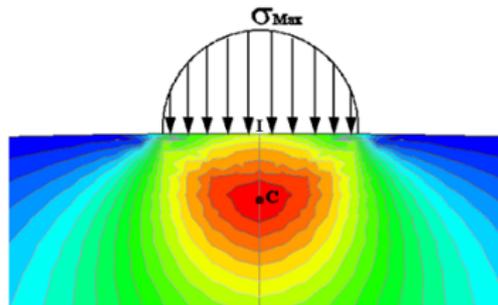


FIGURE 7 – Courbes d'iso-contraintes  $\tau_{\max}$

La profondeur  $h$  de  $\tau_{\max}$  sont déterminantes quant au choix d'un éventuel traitement thermique : en général, on fait en sorte que la couche dure (couche traitée par exemple) ait une épaisseur double de  $h$  (exemple : cas de la profondeur de cémentation).

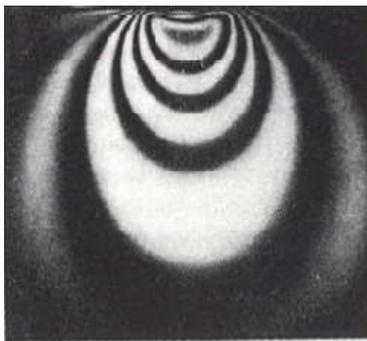


FIGURE 8 – Vue en photo-élasticité

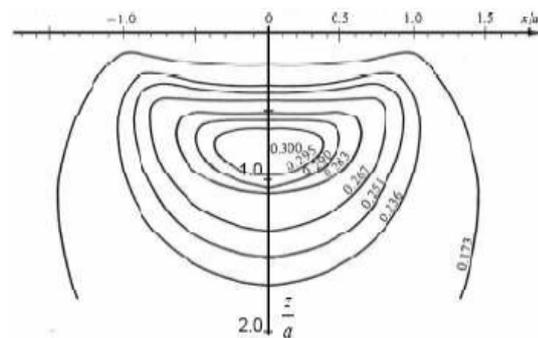
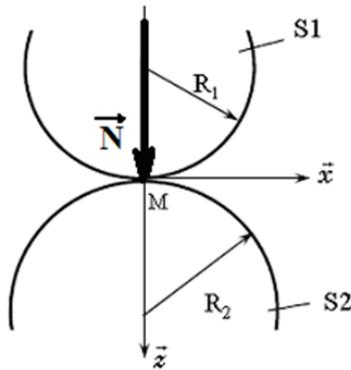


FIGURE 9 – Iso-contraintes tangentielles

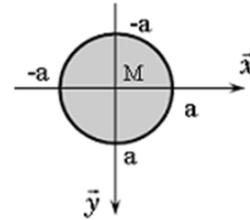
### 3 Quelques résultats classiques

#### 3.1 Contact ponctuel

Mise en situation



Surface de contact après chargement



$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}(k_1 + k_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} N}$$

$E_i$  module d'Young du matériau  $i$

$\nu_i$  coefficient de Poisson du matériau  $i$

Avec :  $k_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}$

Pression de contact

$$p_{\max} = \frac{3N}{2\pi a^2}$$

Rapprochement des pièces

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16}(k_1 + k_2)^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} N^2}$$

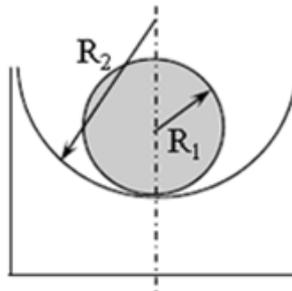


FIGURE 10 – Concavité inverse



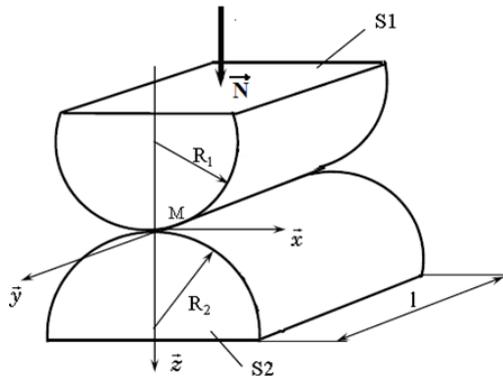
#### Attention

Dans le cas d'un contact ponctuel « intérieur », il faut considérer la relation suivante (attention au changement de signe!) :

$$C = C_1 - C_2 \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \quad \text{d'où} \quad \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad \text{devient} \quad \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

### 3.2 Contact rectiligne

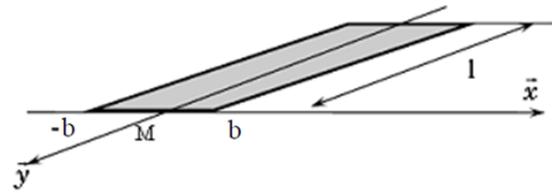
#### Mise en situation



$E_i$  module d'Young du matériau  $i$

$\nu_i$  coefficient de Poisson du matériau  $i$

#### Surface de contact après chargement



$$b = 2\sqrt{(k_1 + k_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{N}{\ell}}$$

Avec :  $k_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}$

#### Pression de contact

$$p_{\max} = \frac{2N}{\pi b \ell}$$

#### Rapprochement des pièces

Le résultat donné par la théorie de Hertz n'est pas validé expérimentalement dans ce cas. Le rapprochement des pièces devra donc être évalué par l'expérience.

## 4 Résultats généralisés

Le tableau page suivante indique les formules et méthodes générales à appliquer en fonction de la géométrie du contact. Les formules utilisent des coefficients  $m$ ,  $n$  et  $r$  qui sont donnés par les courbes FIGURE 11. Ils sont fonction de l'angle  $\varphi$  défini entre les plans principaux de chacun des solides en contact.

#### Définition des courbures

On suppose que les plans de courbures principales (rayon maximal et minimal) sont :

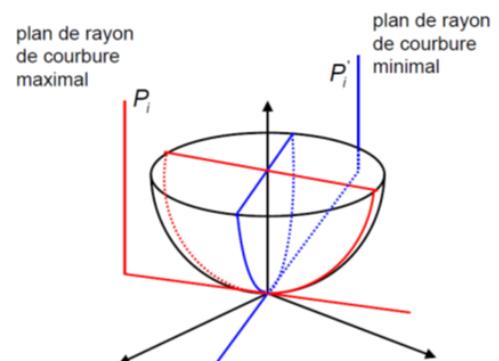
- perpendiculaires pour chaque solide ;
- perpendiculaires au plan tangent  $P$ .

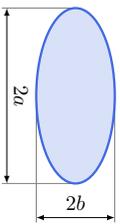
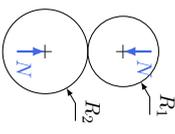
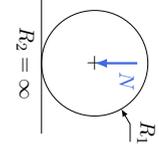
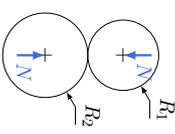
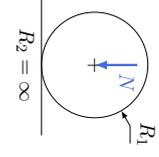
On notera, pour le solide  $i$  :

- courbure maximale dans le plan  $P_i$  :  $|C_i| = \frac{1}{R_i}$  ;
- courbure minimale dans le plan  $P'_i$  :  $|C'_i| = \frac{1}{R'_i}$  ;

Avec :

- $C_i > 0$  pour une courbure convexe (centre de courbure côté matière) ;
- $C_i < 0$  pour une courbure concave (centre de courbure côté extérieur).



		Contact ponctuel			Contact linéique	
Types de contacts		Solides quelconques	Sphère/sphère	Sphère/plan	Cylindre/cylindre	Cylindre/plan
Surface de contact	Forme	 <p>Ellipse (a, b)</p>	 <p>Cercle (a)</p>	 <p>Cercle (a)</p>	 <p>Rectangle (∞, b)</p>	 <p>Rectangle (∞, b)</p>
	Dimensions	$a = \frac{m^3}{n} \sqrt{\frac{3\pi}{2} \frac{k_1 + k_2}{C_1 + C_1' + C_2 + C_2'} N}$ $b = \frac{m}{n} a$	$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} (k_1 + k_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} N}$	$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} (k_1 + k_2) R N}$	$b = 2 \sqrt{(k_1 + k_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} q}$	$b = 2 \sqrt{(k_1 + k_2) q R}$
Rapprochement $\delta$	$\delta = r \frac{3\pi}{4a} (k_1 + k_2) N$	$\delta = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16} (k_1 + k_2)^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} N^2}$	$\delta = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16} (k_1 + k_2)^2 \frac{R}{R} N^2}$	$\delta = 3.84 \cdot 10^{-5} N^{0.9} / T_{0.8} \text{ (acier)}$		
Pression max $p_{max}$	$p_{max} = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi a b}$	$p_{max} = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi a^2}$	$p_{max} = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi a^2}$	$p_{max} = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi \sqrt{(k_1 + k_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} q}}$	$p_{max} = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi \sqrt{(k_1 + k_2) q R}}$	
Profondeur pour $\tau_{max}$ (pour $\nu = 0,3$ )	Fonction de l'excentration de l'ellipse		$h = 0,5a$	$h = 0,5a$	$h = \frac{\pi}{4} b$	$h \approx 0,78b$

\* avec :  $k_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}$

Références

- [1] P. DUBOIS : Cours de sciences de l'ingénieur, 2017. PT\* - Lycée La Martinière - Lyon.
- [2] D. ICETA : Cours de sciences de l'ingénieur, 2017. PT\* - Lycée Eiffel - Cachan.
- [3] F. MOTARD : Cours de sciences de l'ingénieur, 2017. PT\* - Lycée Eiffel - Bordeaux.

Annexe

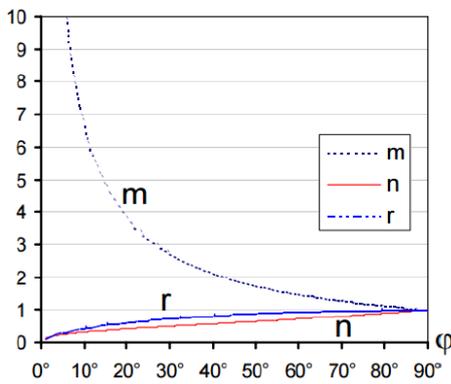


FIGURE 11 – Détermination de  $m$ ,  $n$  et  $r$

$\varphi$	$\lambda$	$m$	$n$	$r$	$s$
15	0,0761	4,8077	0,3657	0,5253	1,7582
14	0,0700	5,0782	0,3556	0,5076	1,8058
13	0,0641	5,3844	0,3451	0,4891	1,8583
12	0,0583	5,7342	0,3343	0,4698	1,9167
11	0,0526	6,1384	0,3229	0,4494	1,9821
10	0,0470	6,6114	0,3110	0,4280	2,0561
9	0,0416	7,1740	0,2984	0,4053	2,1410
8	0,0363	7,8561	0,2851	0,3812	2,2395
7	0,0311	8,7031	0,2707	0,3553	2,3563
6	0,0261	9,7883	0,2552	0,3274	2,4982
5	0,0212	11,2381	0,2381	0,2969	2,6762
4	0,0165	13,2925	0,2189	0,2631	2,9099
3	0,0119	16,4775	0,1966	0,2247	3,2394
2	0,0076	22,2432	0,1692	0,1793	3,7632
1	0,0036	36,9320	0,1313	0,1211	4,8489

FIGURE 12 – Quelques valeurs numériques

a) Pression de matage pour les clavettes parallèles

Conditions de fonctionnement (clavette en A 60)	Pression (MPa)
Assemblage fixe	30 à 115
Déplacement sans charge	12 à 40
Déplacement sous charge	3 à 15

d) Pression de matage pour les galets sur rail (ponts roulants ou chariots)

Matériaux en présence	Pression (MPa) (en charge dynamique)
Acier sur fonte grise	2 à 3
Acier sur acier	4 à 8

b) Pression de matage pour les cannelures

Conditions de fonctionnement	Pression (MPa)
Sans mouvement relatif – sans choc – avec choc	100 à 200 30 à 100
Avec mouvement relatif sans charge – sans choc – avec choc	50 à 100 20 à 60
Avec mouvement relatif sous charge – sans choc – avec choc	10 à 30 3 à 15

e) Pression de matage pour embrayages et freins

Matières	Pression (MPa)	Température (°C)	
		En continu	Ponctuellement
Acier traité / Acier traité	0,5 à 4	100	200
Acier traité / métal fritté – Fer % $\geq$ 40 % – Bronze – Céramique	2 à 6 3 à 6 2 à 8	150 300 500	300 600 800
Fonte grise / Fonte grise	1 à 2	150	250
Acier ou fonte / – Résine synthétique – Toile amiante – Graphite	0,2 à 0,5 0,1 à 2,5 0,1 à 2	50 120 200	90 350 450

c) Pression de matage pour les vis-écrous (système de transformation de mouvement)

Matériaux en présence	Pression (MPa) (en charge dynamique)
Acier sur fonte grise	2 à 5
Acier sur bronze – utilisation courante – pour les machines-outils	5 à 10 0,5 à 2
Acier cémenté trempé sur bronze	10 à 20

FIGURE 13 – Quelques valeurs de pressions admissibles (pressions de matage)