

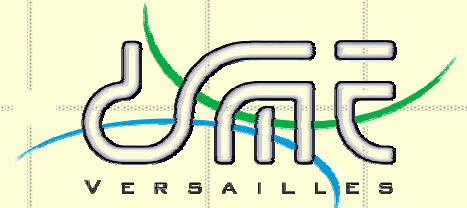


# Introduction aux Cours Matériaux Composites

## Partie: Anisotropie et mécanique des stratifiés



*Master 2 DSME*  
*Responsable du cours: P. Vannucci*





# Qu'est-ce que c'est qu'un matériau composite?

- **Composite:** matériau composé de l'union d'au moins deux matériaux constituants (les *phases*), généralement distingués en :
  - **Matrice**
  - **Fibres**
  - **Charges**
- Caractéristiques mécaniques fondamentales des composites sont:
  - **l'hétérogénéité**
  - **l'anisotropie** (pas toujours)
- Les composites sont employés depuis des millénaires: briques en argile et paille, arcs et arbalètes en bois et tendons d'animaux, épées en alliages différents...

# Exemples typiques (et atypiques) de composites

Classe	Exemple	Composantes	Applications
Composites à matrice organique	carton pneus <b>stratifiés</b>	cellulose caoutchouc, acier résines organiques, fibres de verre, carbone, bore etc.	emballages etc. transports structures légères
	plastiques renforcées	résines, fibres courtes	diverses
Composites à matrice minérale	béton	ciment, sable, additifs	génie civil
	composites C-C	C, fibres de C	aérospatial, aviation, sport, biomécanique
	composites céramiques	céramiques et fibres céramiques	composantes thermomécaniques
Composites à matrice métallique		Al/fibres de B Al/fibres de C	aérospatial
Alliages	aciers Alliages d'Al cuivres	C, Fe, Mn, Cr, Al, Cu, Sn etc.	diverses



# Les concepts clés des composites

- Réunir en un seul deux ou plusieurs matériaux à caractéristiques différentes, qui n'ont pas, séparés, des caractéristiques de valeur, mais qui ensemble forment un matériau avec des propriétés importantes: **c'est l'union qui fait la force!**
- Les fibres utilisées comme renfort ont des propriétés mécaniques **nettement meilleures** (résistance et rigidité) du même matériau en forme massive: la diminution des dimensions caractéristiques implique, souvent, une amélioration des prestations mécaniques car la fibre a, par le procédé de fabrication, **une structure plus parfaite du matériau massif** et parce que **la probabilité de trouver des défauts importants diminue avec les dimensions**



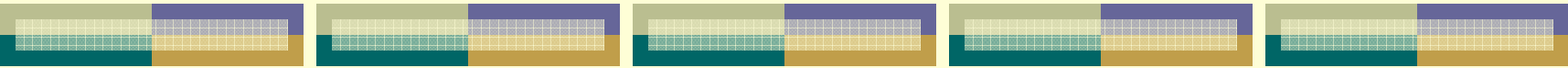
# Les raisons de l'utilisation des composites

- Le développement des composites modernes est dû essentiellement aux besoins de plus en plus poussés de l'industrie, surtout dans les secteurs
  - Aérospatial
  - Aéronautique
  - Défense
  - Sport
  - Biomécanique
- Dans tous ces secteurs les impératifs de **légèreté, rigidité et résistance rendent les composites indispensables**



# Types de matériaux composites structuraux

- **Composites à fibres courtes:** fibres dispersées dans une matrice isotrope, généralement sans orientation préférentielle; comportement macroscopique **isotrope**
- **Composites à fibres longues:** fibres longues noyées dans une matrice isotrope avec orientation établie; comportement macroscopique **anisotrope**
- **Stratifiés:** superposition de plis en composite diversement orientés; **le comportement macroscopique doit être conçu selon les besoins**
- **Sandwiches:** panneaux ou coques conçus pour des sollicitation de flexion; généralement, le comportement dans le plan est **isotrope**



# Constituants principaux des composites à matrice organique

## ● Matrices:

- Résines époxydiques
- Résines polyuréthanes
- Résines polyamides
- Résine phénoliques

## ● Fibres:

- verre
- carbone
- bore
- kevlar
- béryllium

# Qualités générales des composites

- Les qualités principales sont:
  - légèreté
  - résistance
  - rigidité
  - bon comportement à la fatigue
  - possibilité de concevoir le matériau selon la nécessité
  
- Les défauts principaux sont
  - sensibilité aux agents atmosphériques (rayons UV, humidité, température)
  - faible tenue au feu
  - coût
  
- Les paramètres synthétiques d'évaluation des performances mécaniques d'un composite sont les rapports  $E/\rho$  e  $\sigma_{lim}/\rho$



# Données typiques

	Materiau	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	E MPa	$\sigma_u$ MPa	E/ $\rho$ (A) MN m/kg	$\sigma_u/\rho$ (B) kN m/kg	$\rho/\rho_{ac}$	E/E <sub>ac</sub>	$\sigma_u/\sigma_{u ac}$	A/A <sub>ac</sub>	B/B <sub>ac</sub>
Forme massive	Acier	7850	210000	360	26,75	45,86	1	1	0,171	1	1
	Acier haute rés.	7850	210000	2100	26,75	267,52	1	1	1,000	1	5,83
	Alliages d'Al	2700	70000	620	25,93	229,63	0,34	0,33	0,295	0,97	5,01
	Bois	500	30000	15	60,00	30,00	0,06	0,14	0,007	2,24	0,65
	Verre	2500	70000	2100	28,00	840,00	0,32	0,33	1,000	1,05	18,32
	Tungstène	19300	350000	4100	18,13	212,44	2,46	1,67	1,952	0,68	4,63
	Berillium	1830	300000	700	163,93	382,51	0,23	1,43	0,333	6,13	8,34
	Tytane	4610	115000	1900	24,95	412,15	0,59	0,55	0,905	0,93	8,99
Fibres	Verre E	2540	72400	3500	28,50	1377,95	0,32	0,34	1,667	1,07	30,05
	Verre S	2480	85500	4600	34,48	1854,84	0,32	0,41	2,190	1,29	40,45
	Carbone	1380	190000	1700	137,68	1231,88	0,18	0,90	0,810	5,15	26,86
	Carbone HM	1900	390000	2100	205,26	1105,26	0,24	1,86	1,000	7,67	24,10
	Carbone HR	1850	240000	3500	129,73	1891,89	0,24	1,14	1,667	4,85	41,25
	Kevlar	1500	130000	2800	86,67	1866,67	0,19	0,62	1,333	3,24	40,70
	Bore	2630	385000	2800	146,39	1064,64	0,34	1,83	1,333	5,47	23,22
	Berillium	1830	300000	1700	163,93	928,96	0,23	1,43	0,810	6,13	20,26
Matrices	Polyester	1200	3000	80	2,50	66,67	0,15	0,01	0,038	0,09	1,45
	Phénoliques	1200	3000	60	2,50	50,00	0,15	0,01	0,029	0,09	1,09
	Epoxydes	1500	5000	100	3,33	66,67	0,19	0,02	0,048	0,12	1,45
	Polyamides	1140	2500	85	2,19	74,56	0,15	0,01	0,040	0,08	1,63




# Produits industriels de base

 Fibres

 Mats

 Tissus

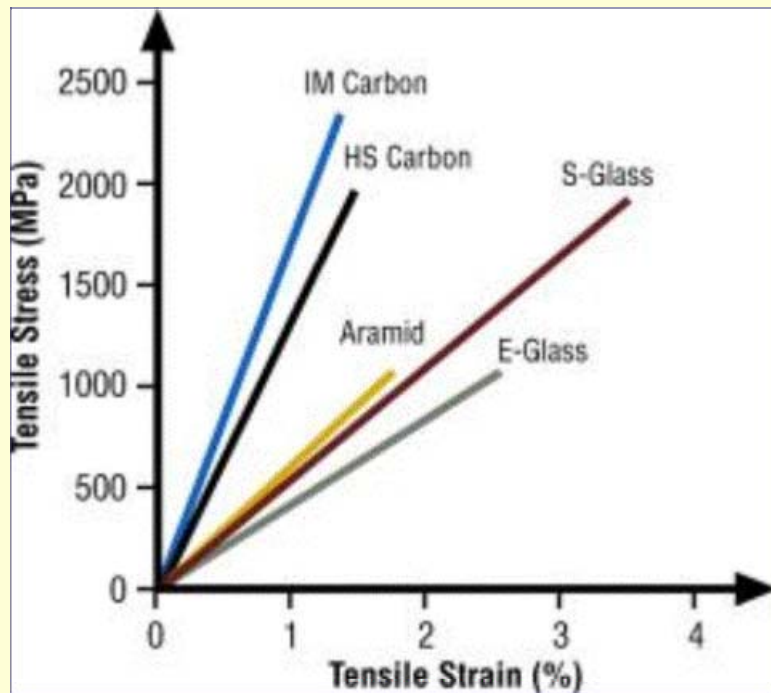
 Plis pré-imprégnés

 Stratifiés

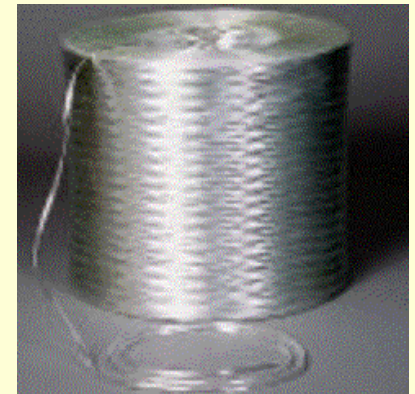
 Sandwiches

# Fibres

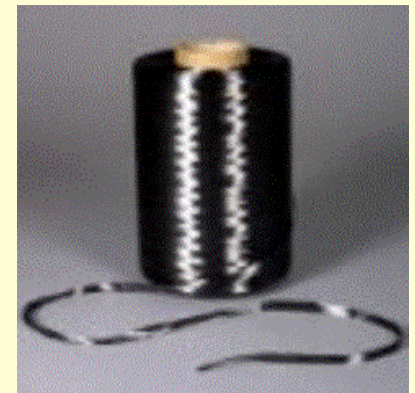
- Les fibres sont le constituant de base du renfort des composites



verre

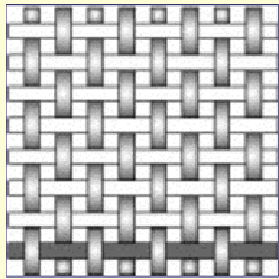


carbone

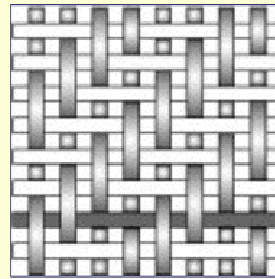


# Tissus

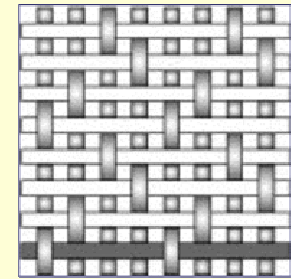
- Généralement, les renforts sont produits en forme de tissu
- Les principaux types de tissus sont:



Taffetas (plain)

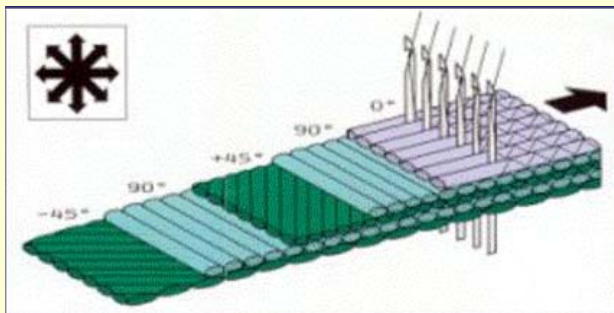


Sergé (twill)

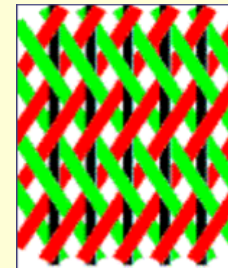
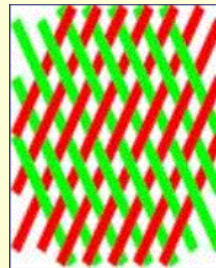


Satin

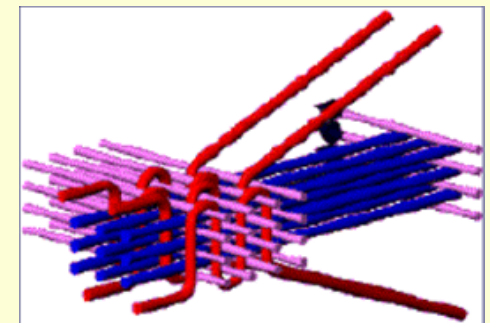
- Tissus multidirectionnels



Stitched



Braided



3D



# Mats

- Couches de fibres non tissées, disposées aléatoirement, imprégnées ou pas de résine
- Comportement macroscopique isotrope
- **Applications:**
  - structures légères avec faibles exigences structurales
  - peaux des panneaux sandwich
- **Qualités:**
  - facilité de mise en oeuvre
  - faible coût

# Couches pré-imprégnées

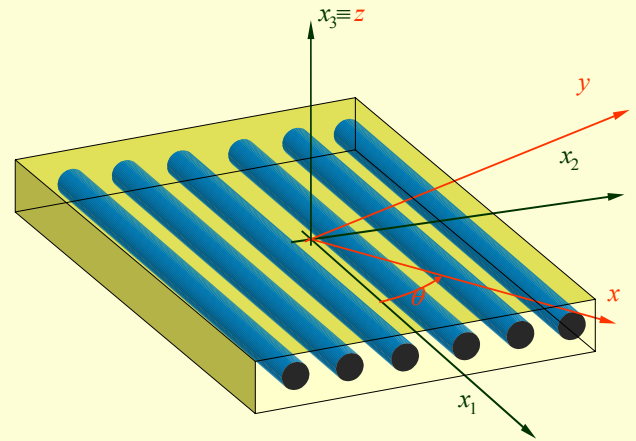
- Tissus avec fibres pré-imprégnées de résine non polymérisée
- Les fibres peuvent être tissées ou UD
- Le comportement est toujours anisotrope

## ● Applications:

- fabrication de stratifiés
- peaux de panneaux sandwich
- coques en stratifiés (surtout les tissus)

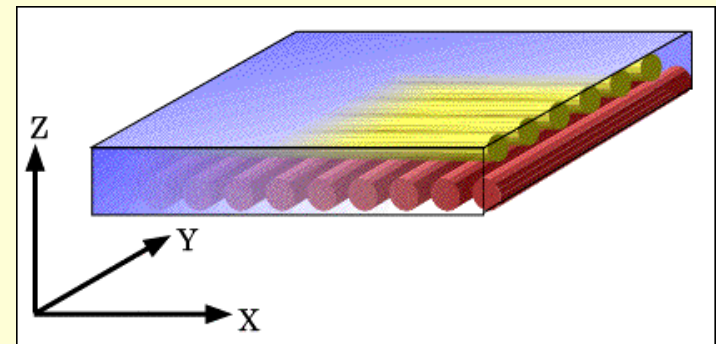
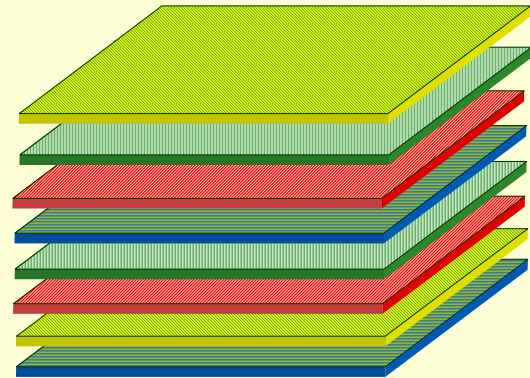
## ● Qualités:

- hautes performances mécaniques
- légèreté



# Stratifiés

- Superposition de plis avec différentes orientations
- Normalement, l'assemblage des couches se fait par polymérisation de l'ensemble, parfois par collage (panneaux en bois)
- **Applications:**
  - structurale
- **Qualités:**
  - hautes performances mécaniques
  - conception *ad hoc*
  - légèreté



# Sandwiches

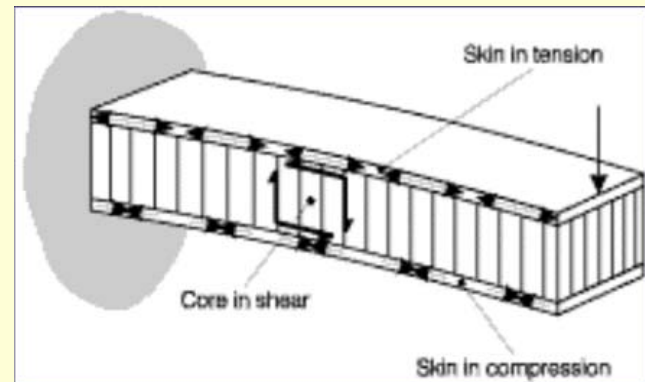
- Les panneaux sandwich sont la généralisation 2D de la poutre en I
- Concept clé: placer la partie résistante à la flexion là où il le faut, à l'extérieur, et remplir la partie centrale avec un matériau léger (mousse solide, balsa, structure à nid d'abeille etc.) qui fait face aux efforts de cisaillement hors plan

## Applications:

- Navales
- Aérospatial
- Aviation
- Sport

## Qualités:

- extrême légèreté
- très grande rigidité en flexion





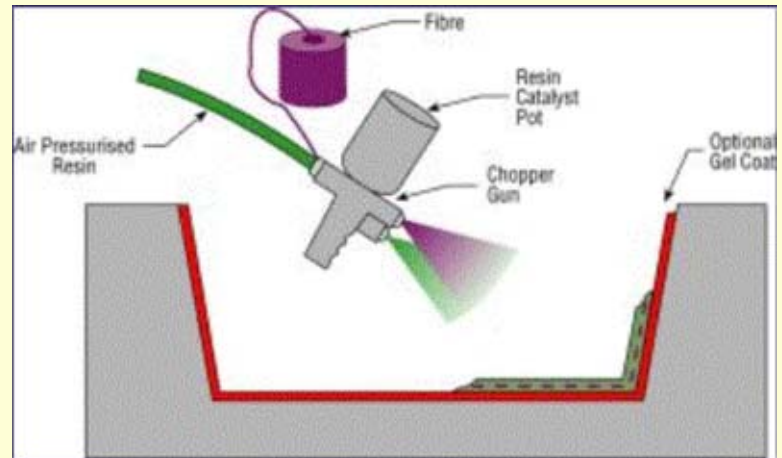


# Technologies de production

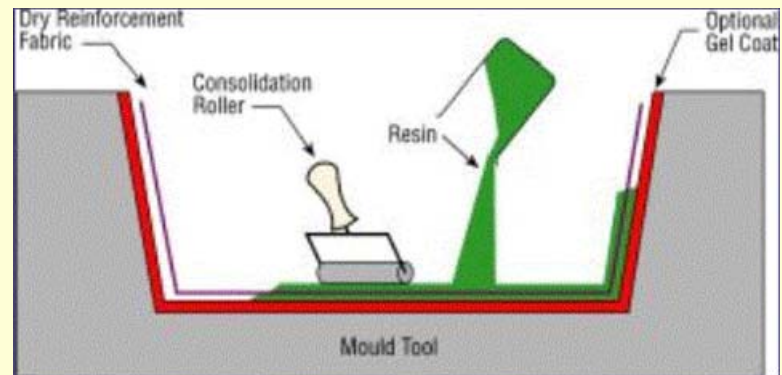
- A la main
- Sous vide
- Resin Transfer Moulding
- Resin Film Infusion
- Pré-imprégnés (prepregs)
- Pultrusion
- Enroulement filamentaire (filament winding)

# Techniques à la main

- **A jet** : jet en pression de résine et fibres courtes



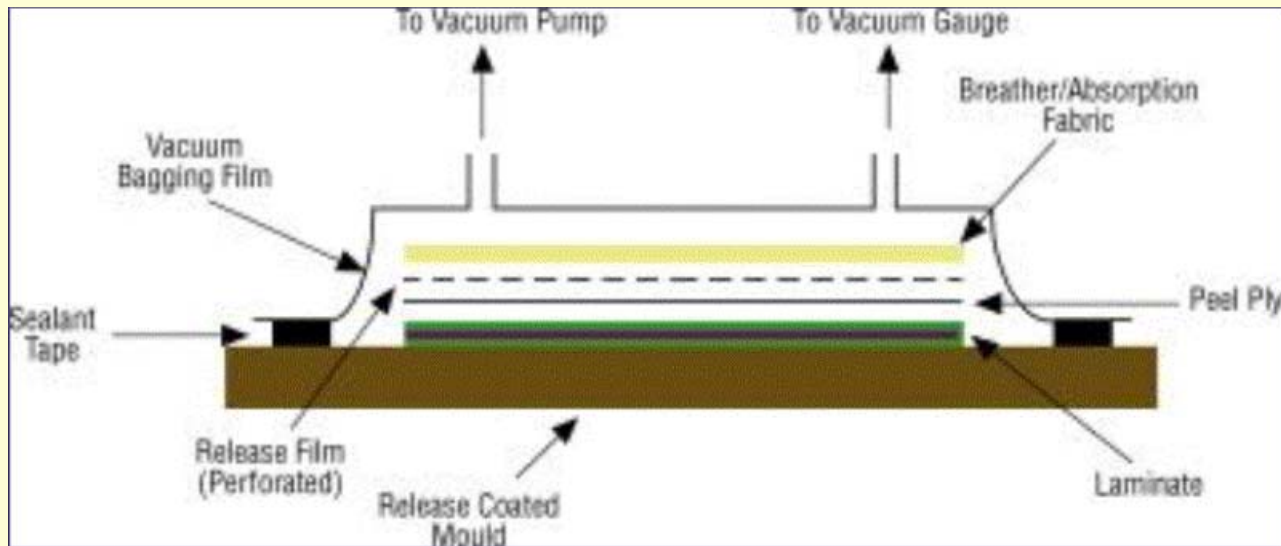
- **Par roulage**: résine roulée sur une couche de fibres pré-appliquées au moule



- Normalement, la polymérisation se fait par catalyseur, à froid

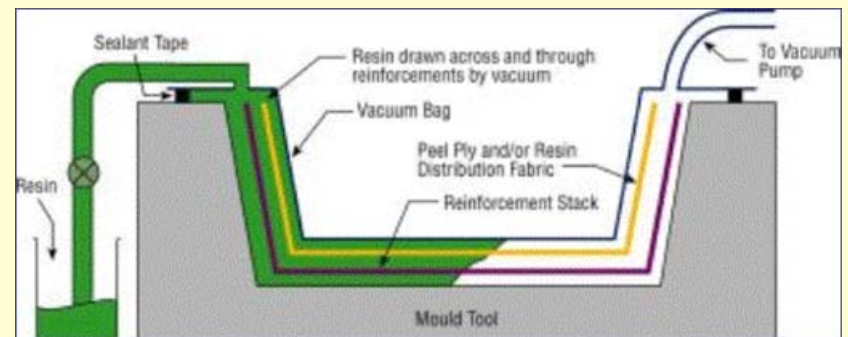
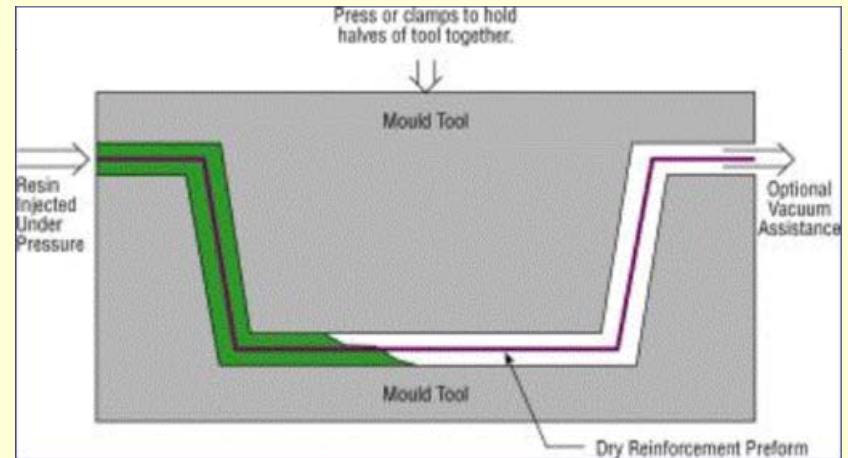
# Moulage sous vide

- La polymérisation se fait dans un moule sous vide, avec compression à la pression atmosphérique



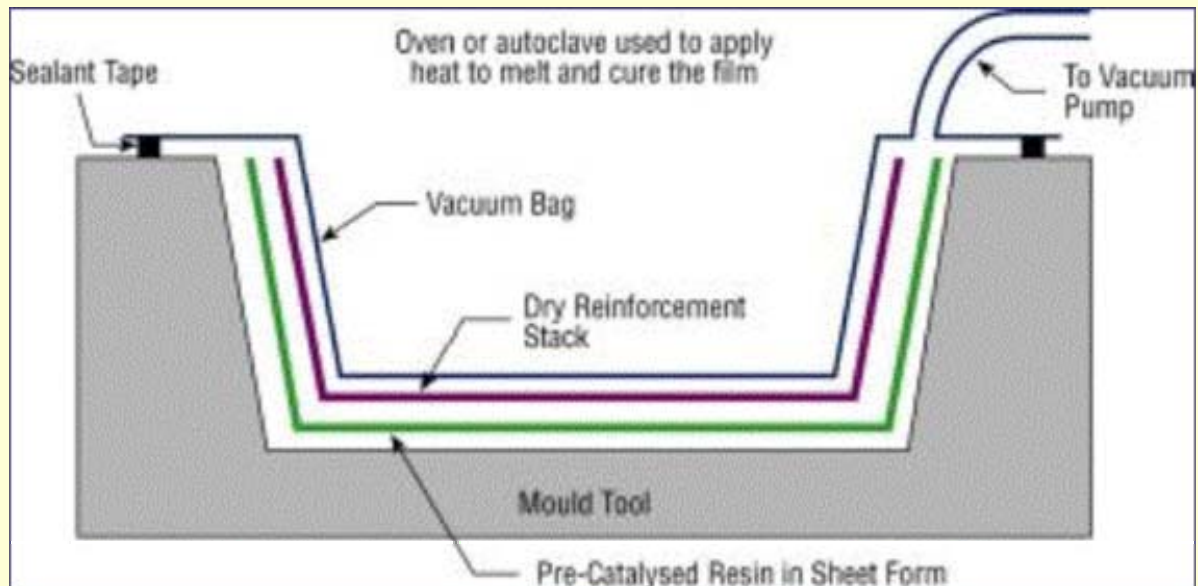
# Resin Transfer Moulding (RTM)

- Renfort mis à sec dans le moule
- Injection de résine en pression (avec éventuellement moule sous vide)
- Polymérisation à froid ou à chaud
  
- Variante: injection sous vide de résine non en pression



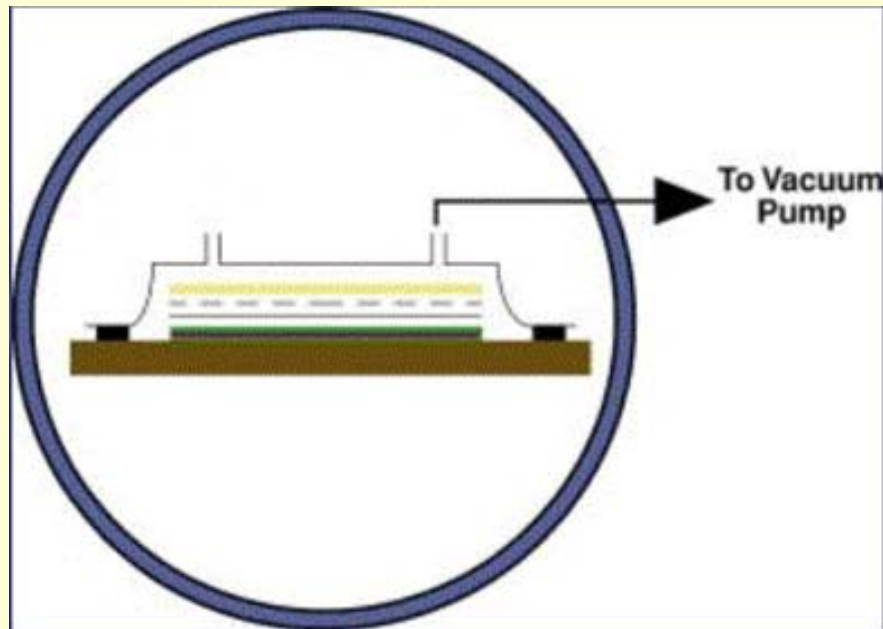
# Resin Film Infusion

- La résine est appliquée à un état semi-solide, sur une couche de support
- Le moule est sous vide
- La résine est faite fondre et ensuite polymériser par apport de chaleur



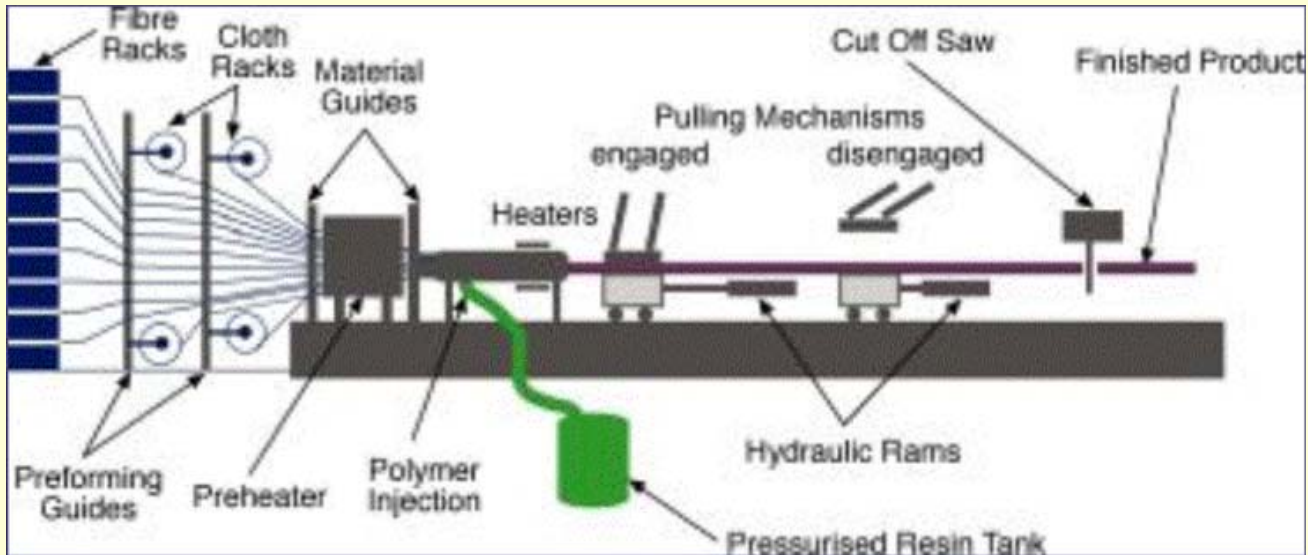
# Pré-imprégnés

- Le stratifié est préparé à froid, par superposition des plis pré-imprégnés
- Le stratifié est mis en autoclave ou dans une presse chauffante pour polymériser sous pression



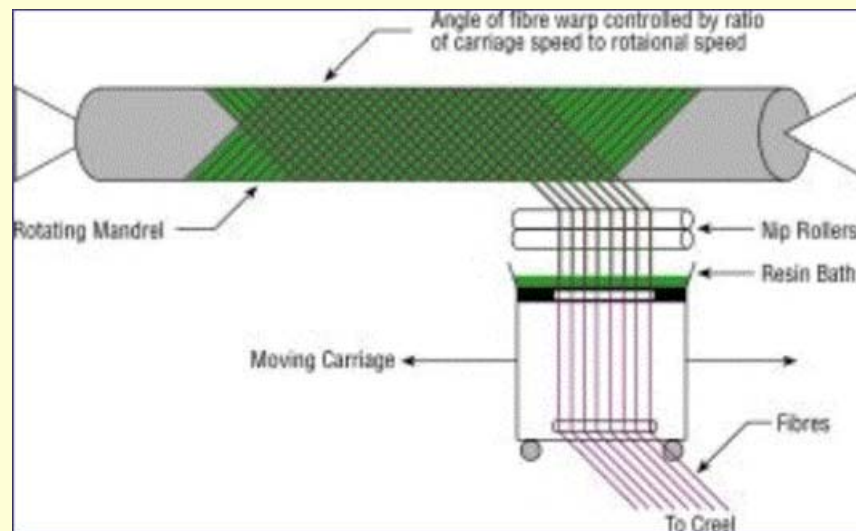
# Pultrusion

- Production en continu de profilés
- La polymérisation se fait à chaud et rapidement



# Enroulement filamentaire

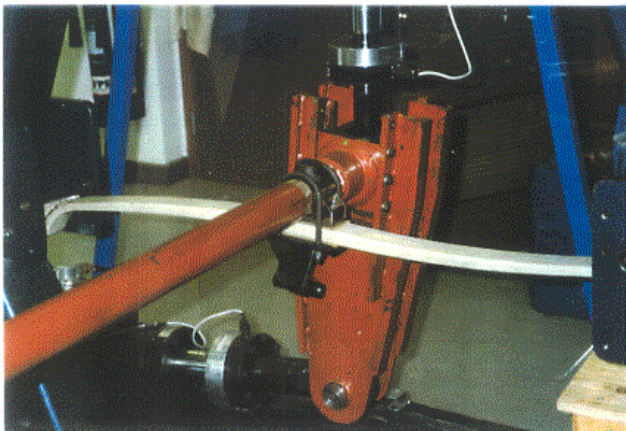
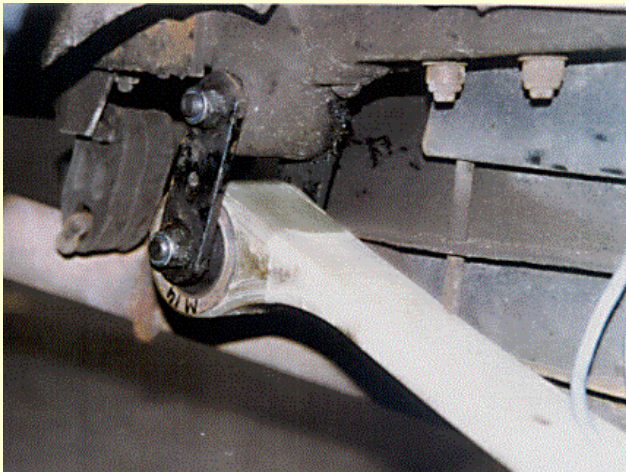
- Technique de réalisation de pièces à symétrie de révolution ou de forme à section convexe
- La fibre est pré-imprégnée de résine et ensuite enroulée sur un mandrin qui donne la forme recherchée
- La polymérisation peut être à froid, à chaud, par rayons UV etc.
- Technique très employée pour construire des réservoirs en pression





# Des exemples d'utilisation des composites

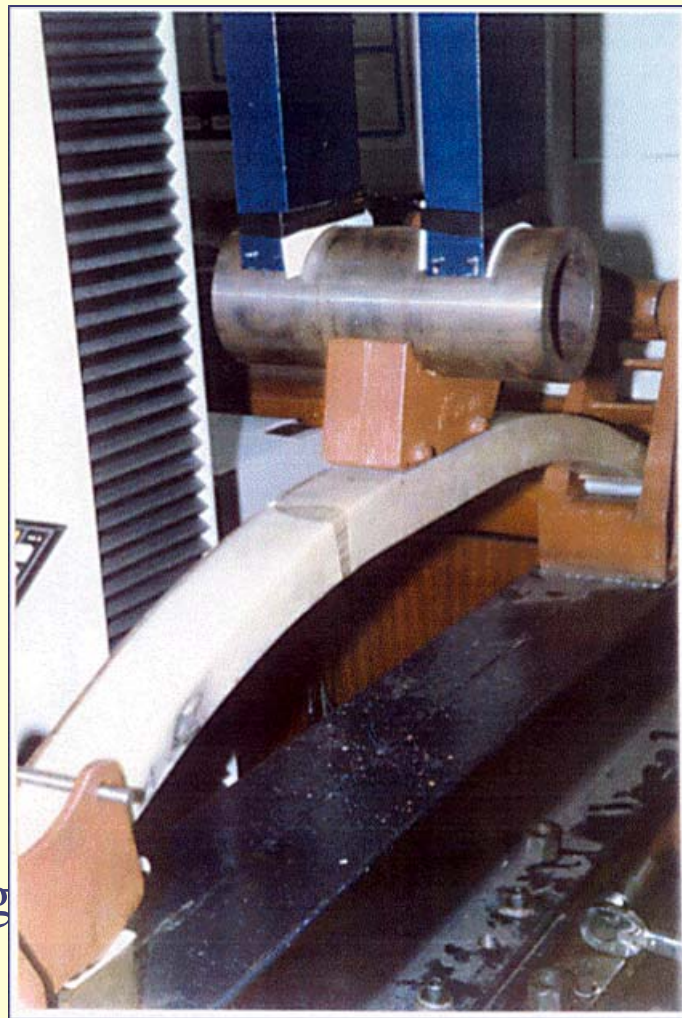
- Taxi Spring: suspensions pour les taxis de Londres



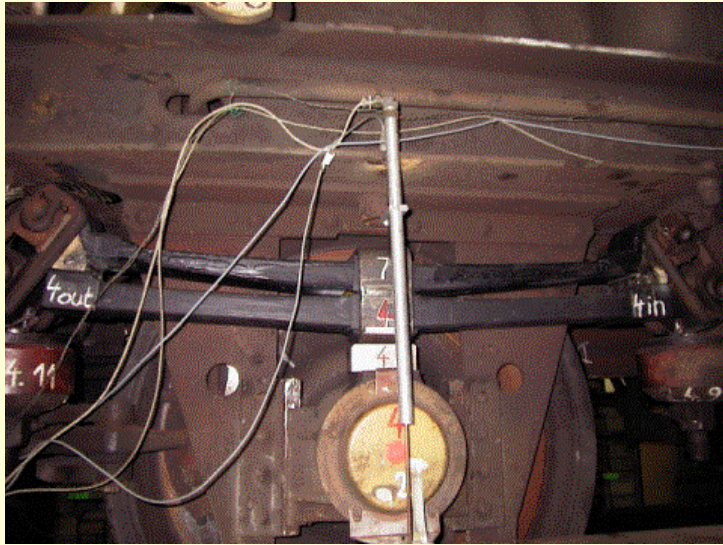
# Trailer Spring: suspensions pour camions



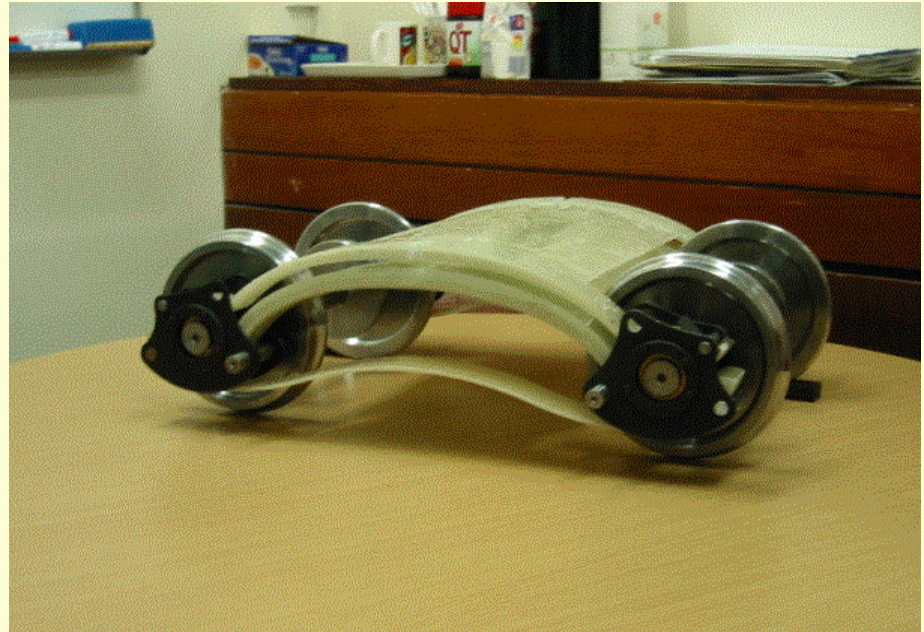
- Poids suspension en acier: 45 kg
- Poids suspension en fibre de verre: 9 kg
- Épaisseur max: 70 mm



# Le projet Eurobogie



- Suspensions à deux phases en fibre de verre pour wagons marchandise



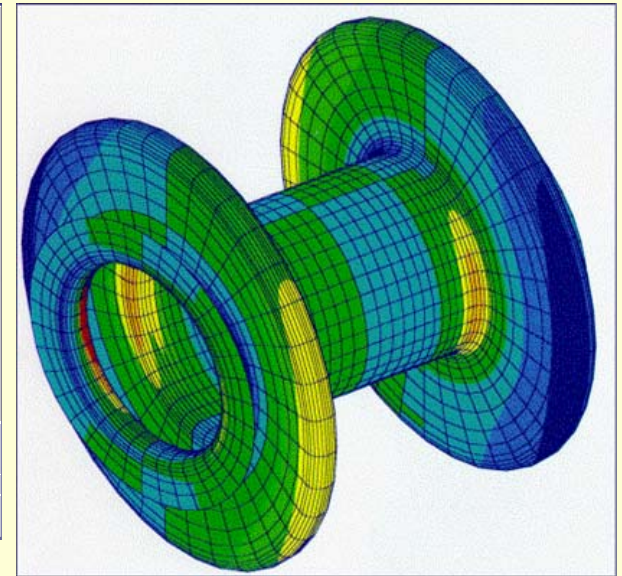
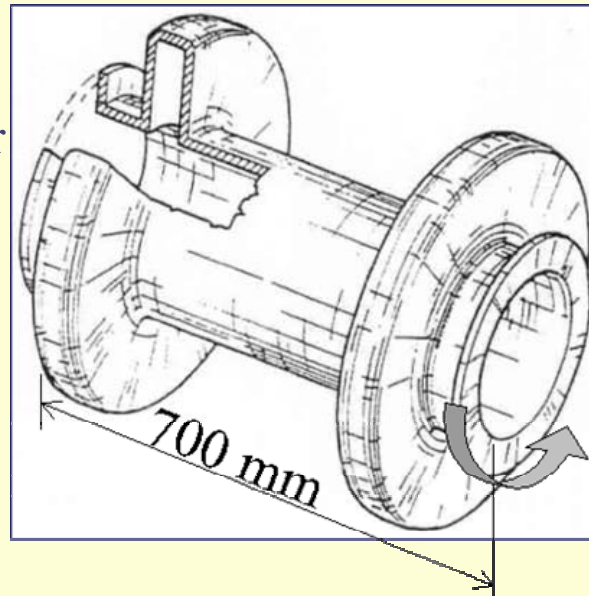
- Bogies de wagons marchandises en fibre de verre pour la diminution de la pollution sonore

# Deux projets pour le TGV

- Barre anti-roulis en carbone et acier



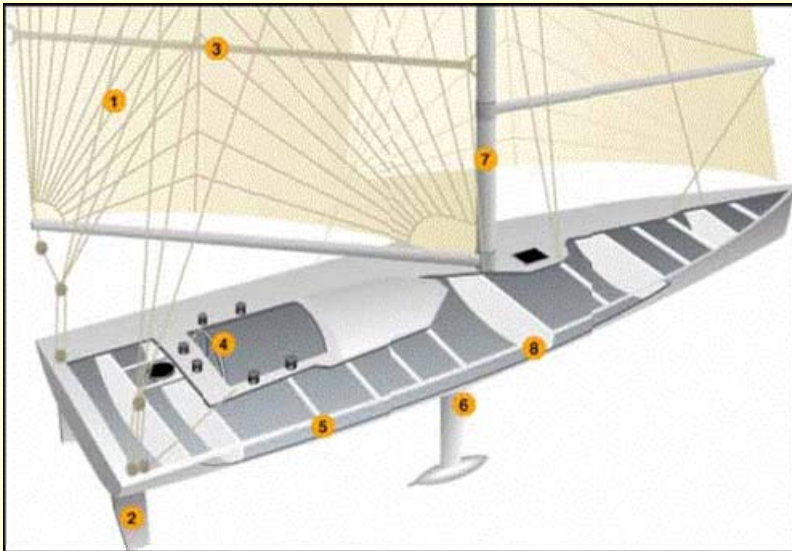
- Joint Jaquemin en fibre de verre pour la transmission de la puissance



- Le futur du TGV: bogies en fibre de verre

# Applications navales

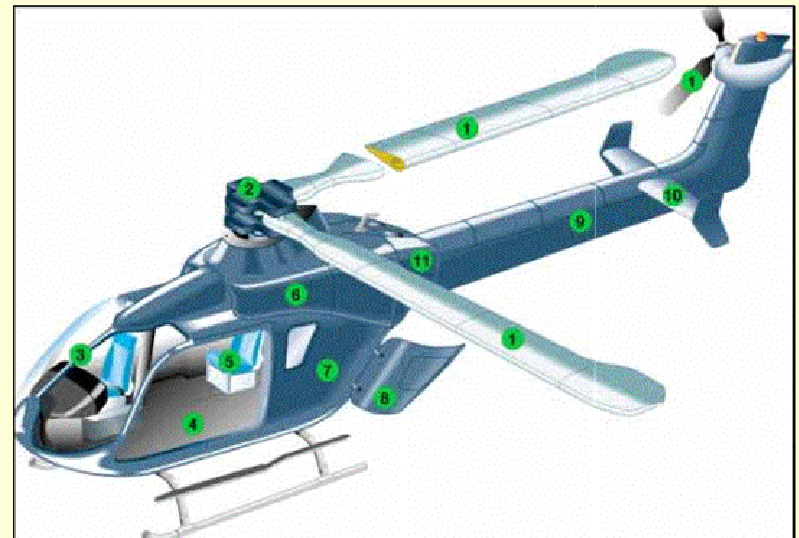
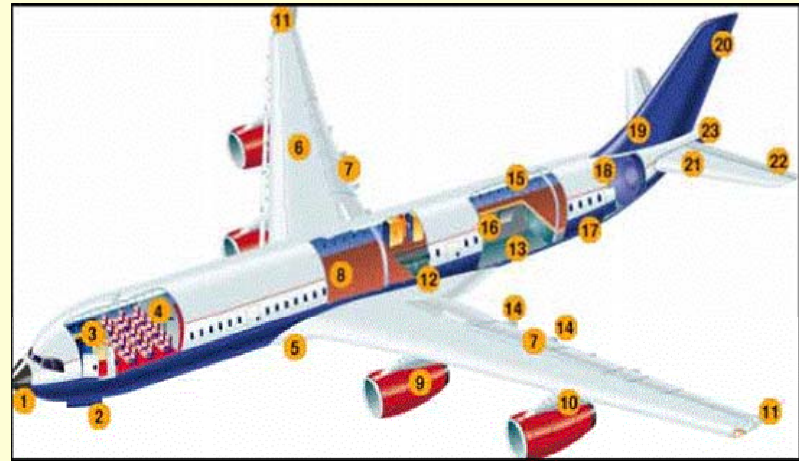
- Coques sandwich
- Structures en composite



- Mat et voiles en carbone

# Applications aéronautiques

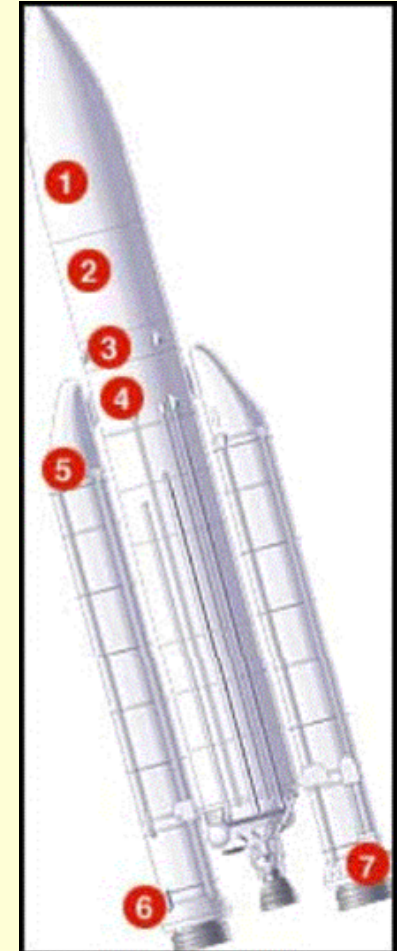
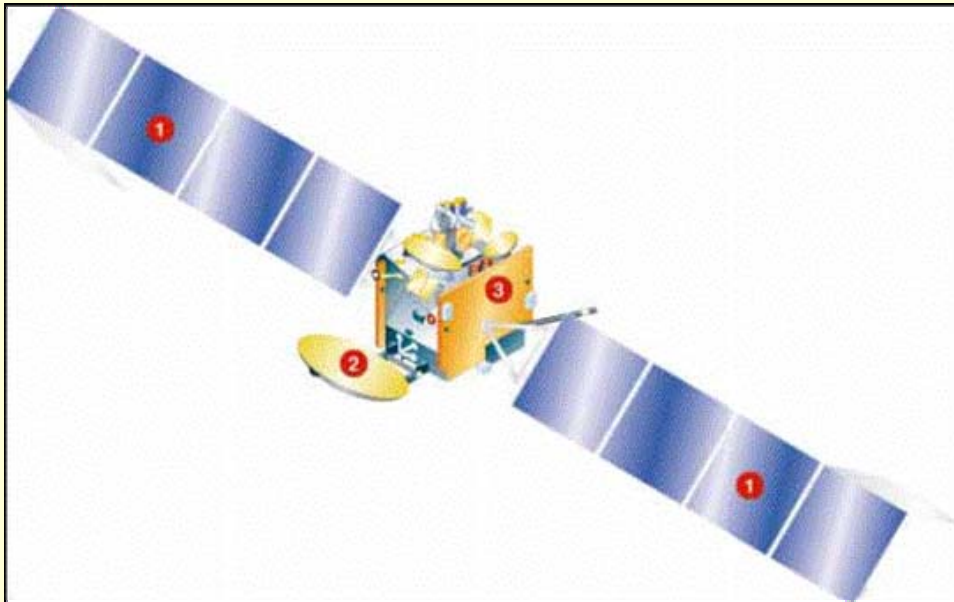
- Plusieurs parties structurales et aérodynamiques (A380)
- Freins en carbone



- Aubes d'hélices et turbines

# Applications aérospatiales

- Structures de satellites et lanceurs  
(sandwich Al-C, stratifiés en C et B)
- Protections thermiques



# Applications sportives

- Coques et freins en carbone pour F1 et formule endurance
- Vélos de compétition en carbone







# Les composites à fibres longues: des matériaux à concevoir

- L'usage structurel des composites est conseillé, même nécessaire, lorsqu'on a des exigences à la fois de résistance, rigidité et légèreté
- Le concepteur a la possibilité et la tâche de concevoir le matériau optimal
- Cependant, les matériaux composites posent aux concepteurs des nouveaux problèmes, avec des phénomènes parfois inattendus et inconnus dans les matériaux classiques
- **Matériau composite=matériau complexe (et compliqué!)**



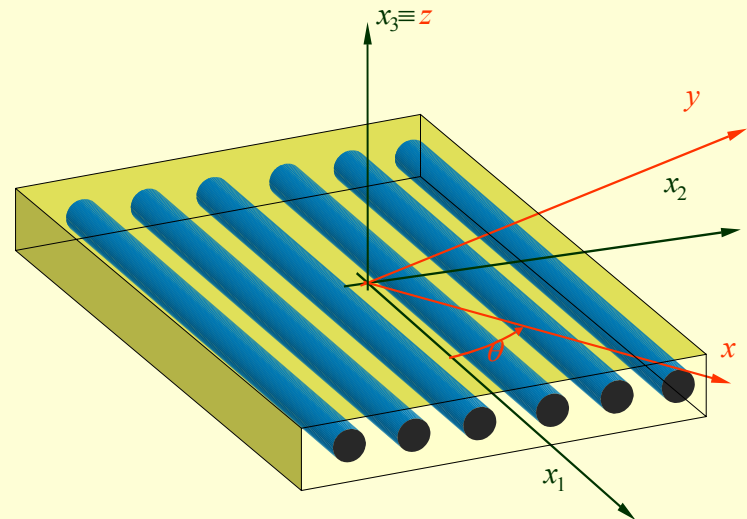
## Les deux aspects fondamentaux des composites à fibres longues

- Étant constitué par deux phases le composite est un matériaux **hétérogène**
- En outre, pour les renforts en fibres longues, l'orientation des fibres détermine une orientation des propriétés mécaniques de rigidité et résistance: la réponse mécanique dépend de la direction: le matériau est **anisotrope**
- Ces deux aspects jouent un rôle décisif à des échelles différentes: à l'échelle **micromécanique** l'hétérogénéité et à l'échelle **macroscopique** l'anisotropie

# Le point de vue macroscopique: l'anisotropie

- Une couche renforcée par des fibres a un comportement orthotrope

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

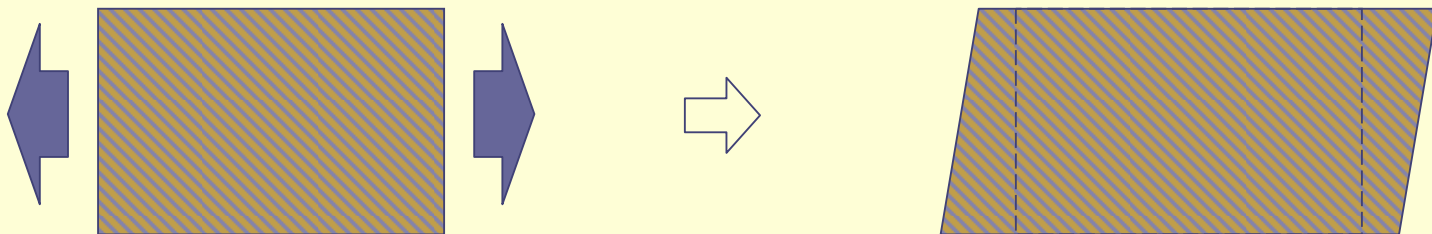


# Le comportement orthotrope hors-axe

- Dans le repère  $\{x, y\}$  tourné de  $\theta$  par rapport aux axes d'orthotropie

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix}$$

- Les  $Q_{xs}$  et  $Q_{ys}$  couplent les contraintes normales avec les déformations de distorsion



# La loi de transformation de Q

Q est un tenseur du 4<sup>ème</sup> ordre et ses composantes dans le plan varient en fonction des puissance d'ordre 4 des fonctions circulaires de  $\theta$

$$Q_{xx} = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4$$

$$Q_{xy} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4)$$

$$Q_{yy} = Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}c^4$$

$$Q_{xs} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c$$

$$Q_{ys} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3$$

$$Q_{ss} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4)$$

# Modules de l'ingénieur

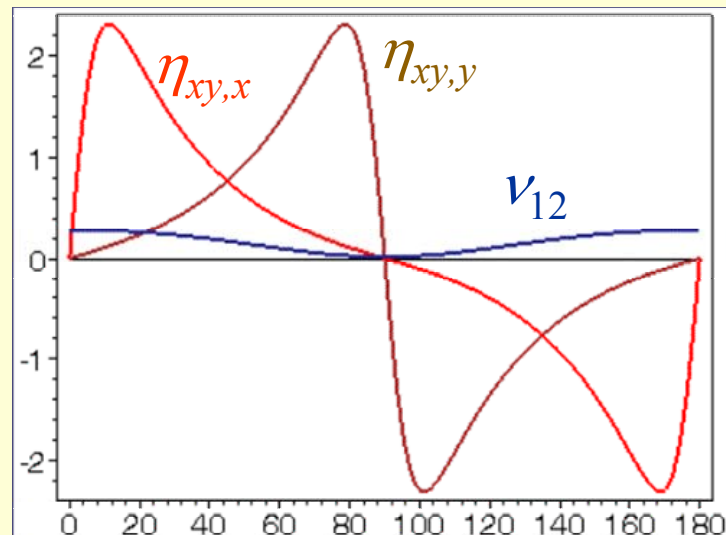
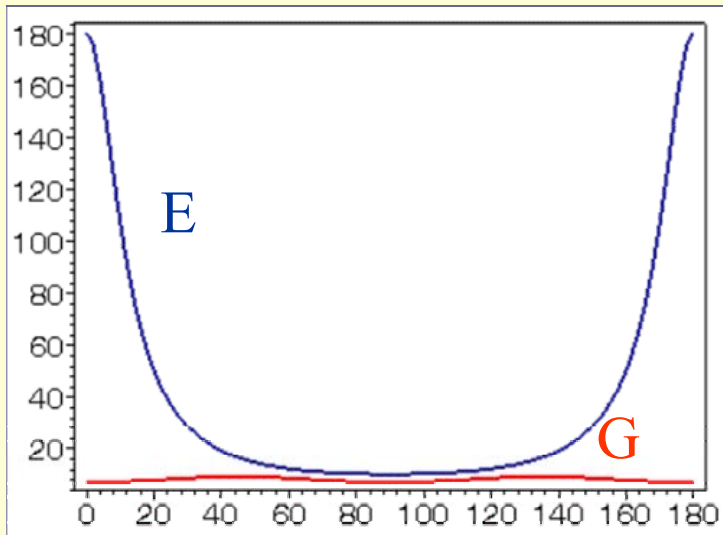
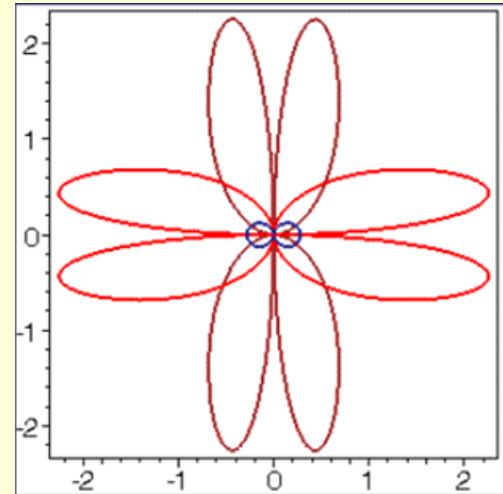
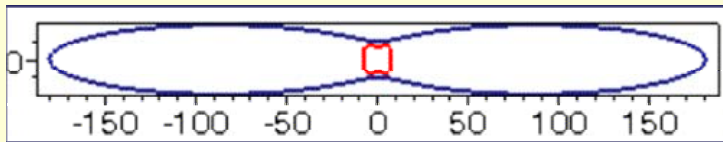
$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}^{-1}$$

$$E_x = \frac{1}{S_{xx}}, \quad E_y = \frac{1}{S_{yy}}, \quad \nu_{xy} = -\frac{S_{xy}}{S_{xx}},$$
$$G_{xy} = \frac{1}{S_{ss}}, \quad \eta_{xy,x} = \frac{S_{xs}}{S_{xx}}, \quad \eta_{xy,y} = \frac{S_{ys}}{S_{yy}}.$$

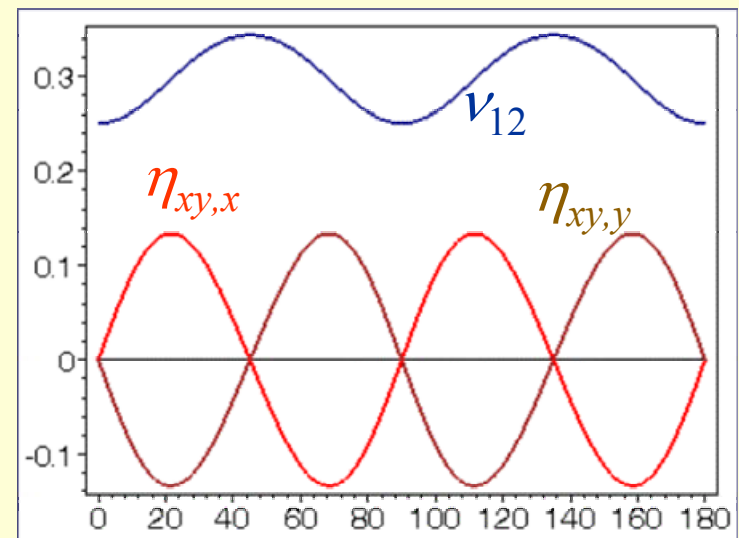
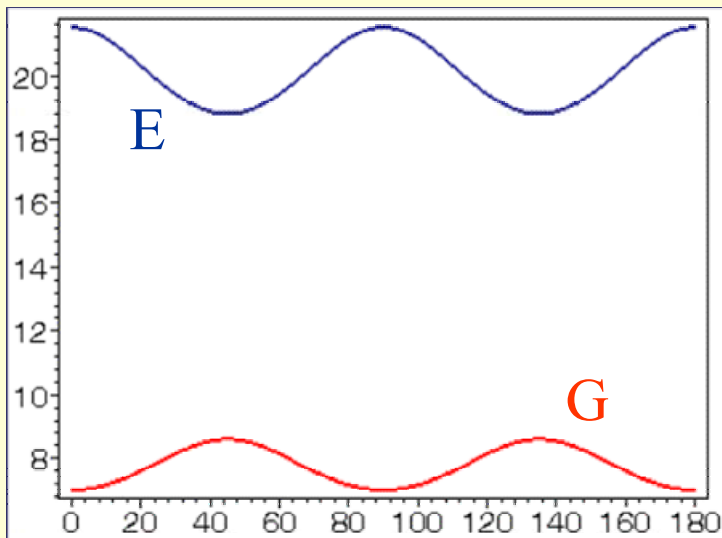
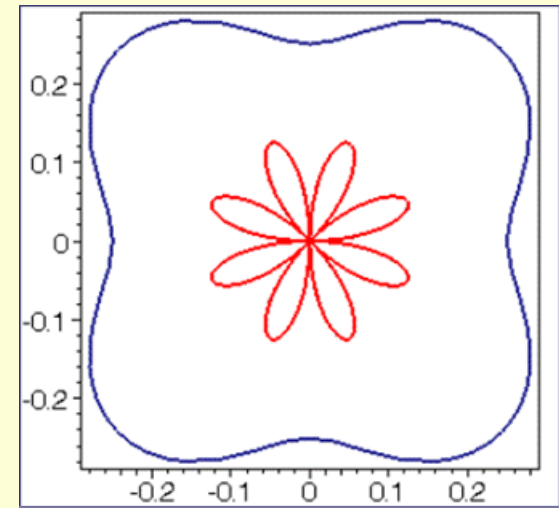
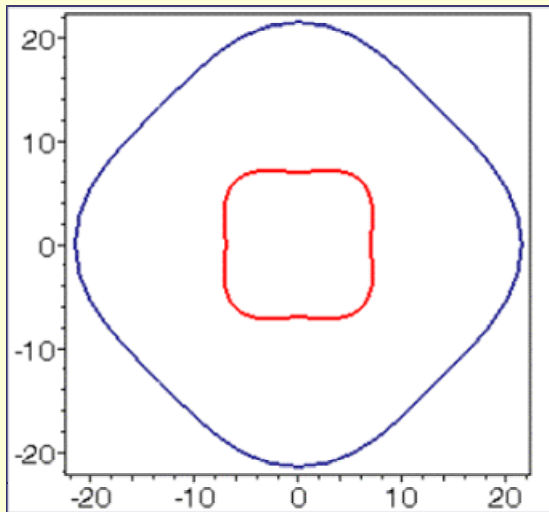
- $\eta_{xy,x}$  e  $\eta_{xy,y}$ : coefficients d'influence mutuelle, nuls pour les matériaux isotropes et pour l'orthotropie dans les axes

# Exemple: couche en carbone UD

● Carbone-époxy  $V_f=0.7$



# Renfort en tissus de verre





# Hétérogénéité: la théorie classique de l'homogénéisation

## ● Équilibre

$$\sigma_1 A_1 = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m$$

## ● Adhérence

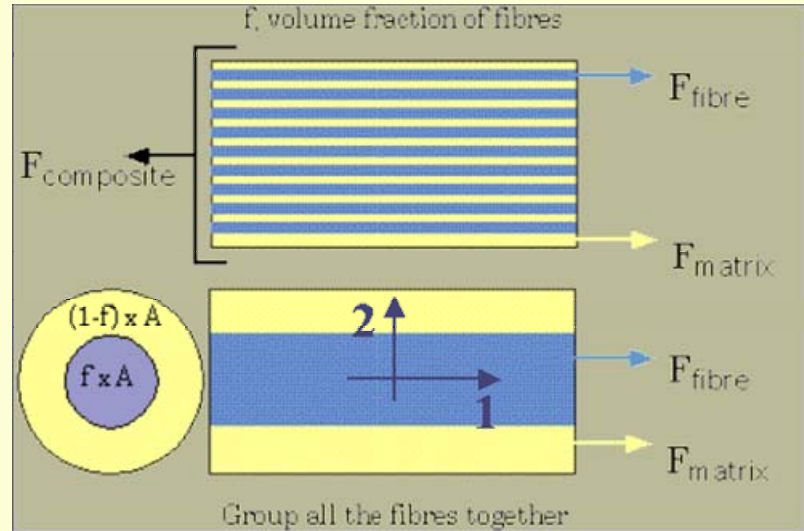
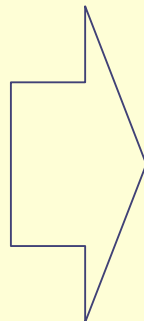
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_f = \varepsilon_m$$

## ● Loi de comportement

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f$$

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_m$$

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1$$



## ● Loi des mélanges

$$E_1 = V_f E_f + V_m E_m$$

# Critères de rupture « ad hoc »

- Contrainte maximale

$$\begin{aligned} -X_C < \sigma_1 < X_t \\ -Y_C < \sigma_2 < Y_t \\ |\sigma_6| < S \end{aligned}$$

- Tsai-Hill

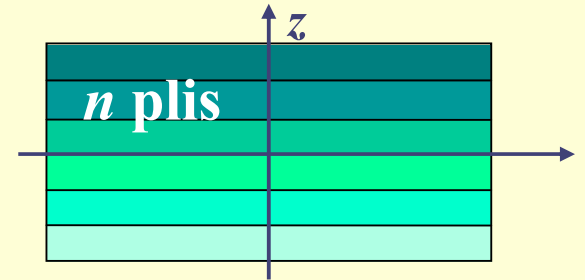
$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{S}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} = 1$$

- Tsai-Wu

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} + \frac{X_c - X_t}{X_t X_c} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c} \sigma_2 + 2F_{12}^* \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_t X_c} = 1$$

# La théorie classique des stratifiés

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k(\delta_k)(z_k - z_{k-1});$$
$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k(\delta_k)(z_k^2 - z_{k-1}^2);$$
$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k(\delta_k)(z_k^3 - z_{k-1}^3);$$

- $\mathbf{A}$ : tenseur du comportement de membrane
- $\mathbf{D}$ : tenseur de comportement de flexion
- $\mathbf{B}$ : tenseur de couplage
- En général  $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ ,  $\mathbf{A} \neq \mathbf{D}$



# Bibliographie

- Jones R. M., **1975**: Mechanics of composite materials. Mc Graw-Hill.
- Tsai S. W., Hahn H. T., **1980**: Introduction to Composite Materials. Technomic.
- Tsai, S. W., **1985**: Composite design guide. Technomic.
- Pedersen P., **1997**: Elasticity, anisotropy, laminates. Cours d'élasticité orienté aux stratifié, sur le site web [www.fam.dtu.dk/html/pp.html](http://www.fam.dtu.dk/html/pp.html)
- Gay D., **1997**: Matériaux composites. Hermès.
- Berthelot J.M., **1999**: Matériaux composites. Comportement mécanique et analyse des structures. Ed. Technique et documentation
- Gürdal Z., Haftka R. T. & Hajela P., **1999**: Design and optimization of laminated composite materials. J. Wiley & Sons.
- Barbero E. J., **1998**: Introduction to composite materials design. Taylor & Francis.
- Vasiliev V. V., Morozov E. V., **2001**: Mechanics and analysis of composite materials. Elsevier.

## Université de Versailles et Saint Quentin-en-Yvelines

LISV - Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes de Versailles

Bâtiment Descartes – RC27

45, Avenue des Etats-Unis

78035 Versailles

Master 2 SPI – DSME

Responsable: Paolo VANNUCCI (paolo.vannucci@meca.uvsq.fr)



Cours *Matériaux Composites: Anisotropie et mécanique des stratifiés*

A.U. 2005-06

# Séquence complète de calcul d'un stratifié

Dans ce document on détaille les étapes nécessaires à mener à bien le calcul d'un stratifié, une fois sa composition connue (matériaux des plis et séquence d'empilement) et lorsque le même stratifié est soumis à un état de sollicitation mécanique et thermique connu. Un exemple numérique est développé à la fin.

## 1. DONNEES DE DEPART

**1.1 Matériaux composant le stratifié:** ils sont orthotropes et d'habitude connus grâce aux constantes de l'ingénieur dans l'es directions d'orthotropie de la couche,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  et  $G_{12}$ , aux caractéristiques de résistance de chaque pli  $X_c$ ,  $X_t$ ,  $Y_c$ ,  $Y_t$ ,  $S$  et éventuellement  $F_{12}^*$ , aux coefficients de dilatation thermique et d'absorption d'eau dans les deux directions d'orthotropie,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , et à leur épaisseur  $h_c$ . Une alternative est celle de donner directement les composantes tensorielles du tenseur de la rigidité  $\mathbf{Q}$ ,  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{22}$  et  $Q_{66}$ ; dans ce cas, l'étape de calcul du tenseur  $\mathbf{Q}$  à partir des constantes de l'ingénieur n'est évidemment pas nécessaire.

**1.2 Actions mécaniques:** elles sont données en spécifiant, dans les axes du stratifié, le tenseurs  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$  des actions de membrane et de flexion:  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$ .

**1.3 Actions thermiques:** elles sont données en spécifiant la variation de température  $t^\circ$  par rapport à un état sans contraintes (normalement celui de fabrication du stratifié) et la variation de température  $\Delta t$  entre la surface supérieure et l'inférieure du stratifié.

**1.4 Actions hygroscopiques:** elles sont données en spécifiant le pourcentage d'eau  $m^\circ$  absorbée par rapport à l'état de fabrication du stratifié et la variation  $\Delta m$  de pourcentage d'eau entre la surface supérieure et inférieure du stratifié.

## 2. CALCUL DES TENSEURS DES COUCHES

On détaille dans ce paragraphe la façon dont on calcule les tenseurs caractéristiques de chaque couche, qui serviront ensuite au calcul des tenseurs caractéristiques du stratifié. Bien évidemment, dans le cas, très fréquent, d'un stratifié composé de plis identiques, ce calcul ne se fait qu'une seule fois, pour le pli de base.

**2.1 Tenseurs  $\mathbf{Q}_k$ :** pour chaque couche  $k$ , il faut calculer le tenseur de rigidité réduite dans les axes d'orthotropie de la couche:

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\
 Q_{66} &= G_{12},
 \end{aligned} \tag{1}$$

avec

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}. \tag{2}$$

**2.2 Tenseurs  $\gamma_k = \mathbf{Q}_k \boldsymbol{\alpha}_k$ :** si le chargement thermique n'est pas nul, pour chaque couche  $k$  il faut calculer le tenseur des rigidités thermique dans les axes d'orthotropie de la couche:

$$\boldsymbol{\gamma}_k = \mathbf{Q}_k \boldsymbol{\alpha}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}\alpha_1 + Q_{12}\alpha_2 \\ Q_{12}\alpha_1 + Q_{22}\alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

**2.3 Tenseurs  $\lambda_k = \mathbf{Q}_k \boldsymbol{\beta}_k$ :** si le chargement hygroscopique n'est pas nul, pour chaque couche  $k$  il faut calculer le tenseur des rigidités hygroscopique dans les axes d'orthotropie de la couche:

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{Q}_k \boldsymbol{\beta}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}\beta_1 + Q_{12}\beta_2 \\ Q_{12}\beta_1 + Q_{22}\beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

### 3. CALCUL DES TENSEURS DU STRATIFIE

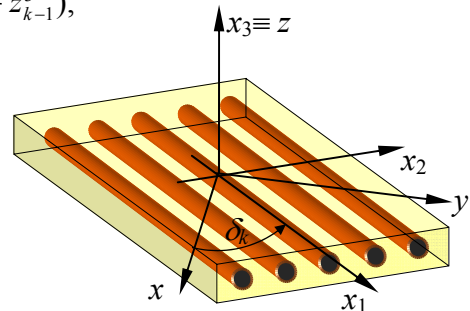
On détaille dans ce paragraphe la façon dont on calcule les tenseurs qui décrivent le comportement du stratifié:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix} - t^o \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} - \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{Bmatrix} - m^o \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{Bmatrix} - \frac{\Delta m}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix}. \tag{5}$$

**3.1: Tenseurs A, B et D:** ces tenseurs sont donnés par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k (\delta_k) (z_k - z_{k-1}), \\
 \mathbf{B} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k (\delta_k) (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\
 \mathbf{D} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k (\delta_k) (z_k^3 - z_{k-1}^3);
 \end{aligned} \tag{6}$$

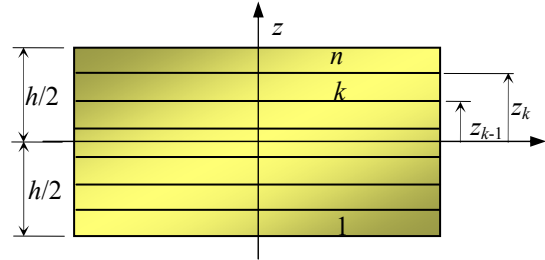
ici,  $\delta_k$  est l'angle dont l'axe  $x_1$  du pli  $k$  est tourné par rapport à l'axe  $x$  du stratifié, comme en figure. Il est impératif d'exprimer les différents tenseurs  $\mathbf{Q}_k$  dans le même repère, celui de la plaque,  $\{x, y, z\}$ .



Pour ce faire, on utilise les formules de changement de repère: si  $c = \cos \delta_k$  et  $s = \sin \delta_k$ , alors

$$\begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{xs} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \\ Q_{ys} \\ Q_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & s^4 \\ sc^3 & s^3c - sc^3 & 2(s^3c - sc^3) & -s^3c \\ s^2c^2 & c^4 + s^4 & -4s^2c^2 & s^2c^2 \\ s^2c^2 & -2s^2c^2 & c^4 + s^4 - 2s^2c^2 & s^2c^2 \\ s^3c & sc^3 - s^3c & 2(sc^3 - s^3c) & -sc^3 \\ s^4 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & c^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{22} \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

Si les plis sont identiques, les formules sont plus simples; en numérotant les couches selon le schéma de figure, on obtient



$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}(\delta_k), \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k \mathbf{Q}(\delta_k), \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{3} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k \mathbf{Q}(\delta_k), \end{aligned} \quad (8)$$

avec

$$\begin{aligned} b_k &= 2k - n - 1, \\ d_k &= \frac{1}{4} [12k(k - n - 1) + 4 + 3n(n + 2)]. \end{aligned} \quad (9)$$

A remarquer que les coefficients  $b_k$  sont antisymétriques par rapport au plan moyen et les  $d_k$  symétriques.

**3.2 Tenseurs U, V et W:** ces tenseurs décrivent le comportement thermo-élastique du stratifié; en général,

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \sum_{k=1}^n \gamma_k(\delta_k)(z_k - z_{k-1}), \\ \mathbf{V} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \gamma_k(\delta_k)(z_k^2 - z_{k-1}^2), \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \gamma_k(\delta_k)(z_k^3 - z_{k-1}^3). \end{aligned} \quad (10)$$

La rotation de  $\delta_k$  des tenseurs  $\gamma_k$ , qui sont des tenseurs du second ordre, se fait grâce aux relations suivantes:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 \\ -sc & sc \\ s^2 & c^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Dans le cas de plis identiques, alors:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} &= \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\gamma}_k(\delta_k), \\
 \mathbf{V} &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k \boldsymbol{\gamma}_k(\delta_k), \\
 \mathbf{W} &= \frac{1}{3} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k \boldsymbol{\gamma}_k(\delta_k).
 \end{aligned} \tag{12}$$

**3.3 Tenseurs F, G et H:** ces tenseurs décrivent le comportement hygro-élastique du stratifié; en général,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k)(z_k - z_{k-1}), \\
 \mathbf{G} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k)(z_k^2 - z_{k-1}^2), \\
 \mathbf{H} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k)(z_k^3 - z_{k-1}^3).
 \end{aligned} \tag{13}$$

La rotation de  $\delta_k$  des tenseurs  $\boldsymbol{\lambda}_k$ , qui sont des tenseurs du second ordre, se fait grâce aux relations suivantes:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{xx} \\ \lambda_{xy} \\ \lambda_{yy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 \\ -sc & sc \\ s^2 & c^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{22} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Dans le cas de plis identiques, alors:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k), \\
 \mathbf{G} &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k), \\
 \mathbf{H} &= \frac{1}{3} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k).
 \end{aligned} \tag{15}$$

#### 4. INVERSION DE LA LOI DE COMPORTEMENT

Le calcul des contraintes dans chaque couche nécessite du calcul des déformations et pour cela il est indispensable d'inverser la loi de comportement (5). Faisons cela par étapes.

**4.1 Cas d'un chargement mécanique:** dans ce cas la (5) se réduit à

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix}; \tag{16}$$

en général, l'inversion donne

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \tag{17}$$

et donc il faut inverser la matrice complète; cela est faisable et on peut écrire la formule d'inversion d'une matrice 6×6 une fois pour toute. Le problème est que cette formule est très longue et compliquée. Une autre façon d'aborder ce même problème est d'inverser un à un les



trois tenseurs qui apparaissent dans (17),  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$ . On peut donc réécrire la (17) sous la forme

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}, \\ \mathbf{d} &= (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}, \\ \mathbf{b} &= -\mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Le problème se simplifie considérablement au cas où le stratifié est découplé; dans ce cas  $\mathbf{B}=\mathbf{b}=\mathbf{0}$  et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^o &= \mathbf{a}\mathbf{N}, \\ \boldsymbol{\chi} &= \mathbf{d}\mathbf{M}, \end{aligned} \quad (20)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{d} &= \mathbf{D}^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

On rappelle la formule d'inversion de  $\mathbf{A}$  (pour  $\mathbf{D}$  c'est analogue):

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{22}A_{66} - A_{26}^2 & A_{16}A_{26} - A_{12}A_{66} & A_{12}A_{26} - A_{16}A_{22} \\ A_{16}A_{26} - A_{12}A_{66} & A_{11}A_{66} - A_{16}^2 & A_{12}A_{16} - A_{11}A_{26} \\ A_{12}A_{26} - A_{16}A_{22} & A_{12}A_{16} - A_{11}A_{26} & A_{11}A_{22} - A_{12}^2 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

avec

$$\Delta = A_{11}A_{22}A_{66} - A_{11}A_{26}^2 - A_{12}^2A_{66} + 2A_{12}A_{16}A_{26} - A_{16}^2A_{22}. \quad (23)$$

**4.2 Cas d'un chargement thermique et/ou hygroscopique:** dans ce cas la (5) se réduit à

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \left( t^o \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{Bmatrix} + m^o \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta m}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} \right). \quad (24)$$

Encore une fois, en inversant les tenseurs un à un grâce aux (19) on trouve:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix} = t^o \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_1 \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} + m^o \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g}_1 \end{Bmatrix} + \frac{\Delta m}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix}, \quad (25)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{a}\mathbf{U} + \mathbf{b}\mathbf{V}, \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{b}^T\mathbf{U} + \mathbf{d}\mathbf{V}, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}\mathbf{V} + \mathbf{b}\mathbf{W}, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{b}^T\mathbf{V} + \mathbf{d}\mathbf{W}, \end{aligned} \quad (26)$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} &= \mathbf{aF} + \mathbf{bG}, \\
 \mathbf{g}_1 &= \mathbf{b}^T \mathbf{F} + \mathbf{dG}, \\
 \mathbf{g}_2 &= \mathbf{aG} + \mathbf{bH}, \\
 \mathbf{h} &= \mathbf{b}^T \mathbf{G} + \mathbf{dH}.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Si le stratifié est à plis identiques et  $\mathbf{B}=\mathbf{O}$ , alors on peut montrer que même  $\mathbf{V}=\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2=\mathbf{O}$  et aussi que  $\mathbf{G}=\mathbf{g}_1=\mathbf{g}_2=\mathbf{O}$  et donc les (26) et (27) se simplifient pour donner

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \mathbf{aU}, \\
 \mathbf{w} &= \mathbf{dW}, \\
 \mathbf{f} &= \mathbf{aF}, \\
 \mathbf{h} &= \mathbf{dH}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

**4.3 Cas d'un chargement complet:** dans ce cas il faut prendre en considération la (5) dans sa totalité et on obtient:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} + t^o \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{Bmatrix} + m^o \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta m}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} \right) \tag{29}$$

et donc, en procédant comme dans les cas précédents,

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} + t^o \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_1 \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} + m^o \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g}_1 \end{Bmatrix} + \frac{\Delta m}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix}. \tag{30}$$

De cette dernière équation on voit bien que la déformation totale, de membrane ou de flexion, est due à la partie mécanique (conséquence de l'application des charges), à la partie thermique et à la partie hygroscopique, comme si toutes agissaient séparément (superposition des effets due à la loi de Hooke-Duhamel).

## 5. CALCUL DES CONTRAINTES DANS LES COUCHES

Les contraintes dans les couches on les calcule grâce à la loi de comportement; elles sont fonction de la couche et de la position du point de calcul à l'intérieur de la couche même, la contrainte et la déformation étant fonction de la position verticale  $z$  par rapport au plan moyen.

**5.1 Calcul des contraintes dans le repère du stratifié:** pour calculer les contraintes dans le repère du stratifié il suffit d'appliquer, pour une couche  $k$ , la loi contrainte déformation pour une position  $z$  qui appartient à la couche; normalement, le calcul est fait en correspondance du plan moyen de la couche, étant donné que pour des couches minces la contrainte ne varie pas beaucoup dans l'épaisseur de la couche même. Donc on aura, pour la couche  $k$ ,

$$\boldsymbol{\sigma}'_k(z) = [\mathbf{Q}_k(\delta_k)] \boldsymbol{\varepsilon}'(z) = [\mathbf{Q}_k(\delta_k)] (\boldsymbol{\varepsilon}^o + z \boldsymbol{\chi}) \tag{31}$$

où  $\mathbf{Q}_k(\delta_k)$  est le tenseur de rigidité de la couche  $k$  calculé dans le repère du stratifié, à l'aide de la (7) et donc déjà connu. La coordonné  $z$  appartient à l'intervalle  $[z_{k-1}, z_k]$ .

**5.2 Calcul des contraintes dans le repère matériel de la couche:** dans ce cas il faut d'abord tourner le tenseur de la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  pour le ramener au repère de la couche:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(z) = [\mathbf{T}^{-T}(\delta_k)] \boldsymbol{\varepsilon}'(z) = [\mathbf{T}^{-T}(\delta_k)] (\boldsymbol{\varepsilon}^o + z \boldsymbol{\chi}) \tag{32}$$

avec

$$\mathbf{T}^{-\text{T}}(\delta_k) = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Ensuite, on aura tout simplement

$$\boldsymbol{\sigma}_k(z) = \mathbf{Q}_k \boldsymbol{\varepsilon}(z), \quad (34)$$

où  $\mathbf{Q}_k$  est le tenseur de rigidité du pli dans son repère matériel.

Une autre façon de faire, est celle de calculer d'abord le tenseur de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}'(z)$  de la couche  $k$  à la côte  $z$  dans le repère du stratifié, selon la (31); ensuite, on ramène la contrainte au repère matériel de la couche grâce à la relation

$$\boldsymbol{\sigma}(z) = [\mathbf{T}(\delta_k)] \boldsymbol{\sigma}'(z), \quad (35)$$

avec

$$\mathbf{T}(\delta_k) = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

## 6. VERIFICATION DES COUCHES

La connaissance de la contrainte dans les couches permet de faire la vérification du matériau, qui doit être faite couche par couche; cette vérification dépend du critère de résistance choisi.

**6.1 Critère de la contrainte maximale:** il s'agit de vérifier que, pour la couche  $k$  et pour chaque valeur de  $z$  dans l'intervalle  $[z_{k-1}, z_k]$ , les contraintes dans le repère matériel soient bornées par les valeurs limites propres au matériau constituant le pli:

$$\begin{aligned} -X_c &\leq \sigma_1 \leq X_t, \\ -Y_c &\leq \sigma_2 \leq Y_t, \\ |\sigma_6| &\leq S. \end{aligned} \quad (37)$$

Alternativement, si l'on connaît les contraintes dans le repère du stratifié, il faudra vérifier que

$$\begin{aligned} -X_c &\leq c^2 \sigma_x + s^2 \sigma_y + 2cs \sigma_s \leq X_t, \\ -Y_c &\leq s^2 \sigma_x + c^2 \sigma_y - 2cs \sigma_s \leq Y_t, \\ | -cs \sigma_x + cs \sigma_y + (c^2 - s^2) \sigma_s | &\leq S. \end{aligned} \quad (38)$$

**6.2 Critère de la déformation maximale:** il s'agit de vérifier que, pour la couche  $k$  et pour chaque valeur de  $z$  dans l'intervalle  $[z_{k-1}, z_k]$ , les déformations dans le repère matériel soient bornées par les valeurs limites propres au matériau constituant le pli:

$$\begin{aligned} -X_c^\varepsilon &\leq \varepsilon_1 \leq X_t^\varepsilon, \\ -Y_c^\varepsilon &\leq \varepsilon_2 \leq Y_t^\varepsilon, \\ |\varepsilon_6| &\leq S^\varepsilon. \end{aligned} \quad (39)$$

Alternativement, si l'on connaît les déformations dans le repère du stratifié, il faudra vérifier que (attention, la transformation est différente par rapport à celle des contraintes)

$$\begin{aligned} -X_c^\varepsilon &\leq c^2\varepsilon_x + s^2\varepsilon_y + cs\varepsilon_s \leq X_t^\varepsilon, \\ -Y_c^\varepsilon &\leq s^2\varepsilon_x + c^2\varepsilon_y - cs\varepsilon_s \leq Y_t^\varepsilon, \\ \left| -2cs\varepsilon_x + 2cs\varepsilon_y + (c^2 - s^2)\varepsilon_s \right| &\leq S^\varepsilon. \end{aligned} \quad (40)$$

**6.3 Critère de Tsai-Hill:** il s'agit de vérifier que, pour la couche  $k$  et pour chaque valeur de  $z$  dans l'intervalle  $[z_{k-1}, z_k]$ , les contraintes dans le repère matériel satisfont la limitation:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\sigma_6}{S}\right)^2 \leq 1. \quad (41)$$

Dans la (41), les valeurs de  $X$  et  $Y$  sont celles de compression ou de traction; à défaut d'indications plus précises, on choisira, de façon conservatrice, la valeur qui rend le premier membre le plus grand.

Alternativement, si l'on connaît les contraintes dans le repère du stratifié, il faudra vérifier que

$$\begin{aligned} &\left(\frac{c^2\sigma_x + s^2\sigma_y + 2cs\sigma_s}{X}\right)^2 + \left(\frac{s^2\sigma_x + c^2\sigma_y - 2cs\sigma_s}{Y}\right)^2 - \\ &\frac{(c^2\sigma_x + s^2\sigma_y + 2cs\sigma_s)(s^2\sigma_x + c^2\sigma_y - 2cs\sigma_s)}{X^2} + \left(\frac{-cs\sigma_x + cs\sigma_y + (c^2 - s^2)\sigma_s}{S}\right)^2 \leq 1. \end{aligned} \quad (42)$$

**6.4 Critère de Hoffmann:** il s'agit de vérifier que, pour la couche  $k$  et pour chaque valeur de  $z$  dans l'intervalle  $[z_{k-1}, z_k]$ , les contraintes dans le repère matériel satisfont la limitation:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X_t X_c} + \frac{X_c - X_t}{X_c X_t} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_c Y_t} \sigma_2 + \frac{\sigma_6^2}{S^2} \leq 1. \quad (43)$$

Comme pur les critères précédents, on peut faire le calcul directement dans le repère du stratifié.

**6.5 Critère de Tsai-Wu:** il s'agit de vérifier que, pour la couche  $k$  et pour chaque valeur de  $z$  dans l'intervalle  $[z_{k-1}, z_k]$ , les contraintes dans le repère matériel satisfont la limitation:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + 2F_{12}^* \frac{\sigma_1\sigma_2}{X_t X_c} + \frac{X_c - X_t}{X_c X_t} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_c Y_t} \sigma_2 + \frac{\sigma_6^2}{S^2} \leq 1. \quad (44)$$

Comme pur les critères précédents, on peut faire le calcul directement dans le repère du stratifié. A remarquer que si, comme c'est le cas souvent,

$$F_{12}^* = -\frac{1}{2} \quad (45)$$

les critères de Hoffmann et de Tsai-Wu coïncident.

## 7. CALCUL DES CARACTERISTIQUES EQUIVALENTES DU STRATIFIE

**7.1 Constantes de l'ingénieur:** les constantes de l'ingénieur en membrane et en flexion se calculent facilement à partir des tenseurs de souplesse normalisé:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^* &= h \mathbf{a}, \\ \mathbf{d}^* &= \frac{h^3}{12} \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (46)$$

Donc, une fois calculés  $\mathbf{a}^*$  et  $\mathbf{d}^*$ , on a (indice  $m$  pour les caractéristiques de membrane,  $f$  pour celles de flexion):

$$\begin{aligned} E_x^m &= \frac{1}{a_{xx}^*}, & E_x^f &= \frac{1}{d_{xx}^*}, \\ E_y^m &= \frac{1}{a_{yy}^*}, & E_y^f &= \frac{1}{d_{yy}^*}, \\ G_{xy}^m &= \frac{1}{a_{ss}^*}, & G_{xy}^f &= \frac{1}{d_{ss}^*}, \\ \nu_{xy}^m &= -\frac{a_{xy}^*}{a_{xx}^*}, & \nu_{xy}^f &= -\frac{d_{xy}^*}{d_{xx}^*}, \\ \eta_{xy,x}^m &= \frac{a_{xs}^*}{a_{xx}^*}, & \eta_{xy,x}^f &= \frac{d_{xs}^*}{d_{xx}^*}, \\ \eta_{xy,y}^m &= \frac{a_{ys}^*}{a_{yy}^*}, & \eta_{xy,y}^f &= \frac{d_{ys}^*}{d_{yy}^*}. \end{aligned} \quad (47)$$

**7.2 Caractéristiques thermo-hygroscopiques:** les coefficients de dilatation et de courbure thermo-hygroscopiques sont simplement les composantes des tenseurs  $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{f}$  et  $\mathbf{h}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_x^m &= u_x, & \alpha_x^f &= w_x, \\ \alpha_y^m &= u_y, & \alpha_y^f &= w_y, \\ \alpha_{xy}^m &= \frac{u_s}{2}, & \alpha_{xy}^f &= \frac{w_s}{2}, \\ \beta_x^m &= f_x, & \beta_x^f &= h_x, \\ \beta_y^m &= f_y, & \beta_y^f &= h_y, \\ \beta_{xy}^m &= \frac{f_s}{2}, & \beta_{xy}^f &= \frac{h_s}{2}. \end{aligned} \quad (48)$$

## 8. EXEMPLE NUMERIQUE

Stratifié avec 5 couches identiques, séquence  $[\alpha/-\alpha/0/-\alpha/\alpha]$ , avec  $\alpha=30^\circ$ . Le matériau est du carbon-époxyde T300-5208; les valeurs caractéristiques sont:

$$\begin{aligned} h_c &= 0.125 \text{ mm} \\ E_1 &= 181000 \text{ MPa} \\ E_2 &= 10300 \text{ MPa} \\ G_{12} &= 7170 \text{ MPa} \\ \nu_{12} &= 0.28 \\ X_t &= 1400 \text{ MPa} \\ X_c &= 900 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$Y_t = 35 \text{ MPa}$$

$$Y_c = 110 \text{ MPa}$$

$$S = 70 \text{ MPa}$$

$$F_{12}^* = -0.3$$

Le stratifié est chargé avec

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ -0.5 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \frac{\text{MN}}{\text{m}}, \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-6} \text{ MN}.$$

En faisant les calculs comme indiqué on trouve:

$$h = 0.625 \text{ mm}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 181811 & 2897 & 0 \\ 2897 & 10346 & 0 \\ 0 & 0 & 7170 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\mathbf{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} 109379 & 32463 & 54193 \\ 32463 & 23647 & 20053 \\ 54193 & 20053 & 36736 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\mathbf{Q}(-\alpha) = \begin{bmatrix} 109379 & 32463 & -54193 \\ 32463 & 23647 & -20053 \\ -54193 & -20053 & 36736 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 77.41 & 16.59 & 0 \\ 16.59 & 13.12 & 0 \\ 0 & 0 & 19.26 \end{bmatrix} \frac{\text{MN}}{\text{m}}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2.24 & 0.65 & 0.63 \\ 0.65 & 0.48 & 0.23 \\ 0.63 & 0.23 & 0.74 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \text{ MNm}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0.18 & -0.22 & 0 \\ -0.22 & 1.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.52 \end{bmatrix} \times 10^{-1} \frac{\text{m}}{\text{MN}}$$



$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0.84 & -0.95 & -0.42 \\ -0.95 & 3.54 & -0.31 \\ -0.42 & -0.31 & 1.81 \end{bmatrix} \times 10^6 \frac{1}{\text{MNm}}$$

$$\mathbf{a}^* = \begin{bmatrix} 0.11 & -0.14 & 0 \\ -0.14 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0 & 0.32 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \frac{1}{\text{MPa}}$$

$$\mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} 0.17 & -0.19 & -0.08 \\ -0.19 & 0.72 & -0.06 \\ -0.08 & -0.06 & 0.37 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \frac{1}{\text{MPa}}$$

$$\begin{aligned} E_x^m &= 90279 \text{ MPa}, & E_x^f &= 58148 \text{ MPa}, \\ E_y^m &= 15296 \text{ MPa}, & E_y^f &= 13887 \text{ MPa}, \\ G_{xy}^m &= 30822 \text{ MPa}, & G_{xy}^f &= 27228 \text{ MPa}, \\ \nu_{xy}^m &= 1.265, & \nu_{xy}^f &= 1.124, \\ \eta_{xy,x}^m &= 0, & \eta_{xy,x}^f &= -0.5, \\ \eta_{xy,y}^m &= 0, & \eta_{xy,y}^f &= -0.087. \end{aligned}$$

**Remarque:** le stratifié est orthotrope en membrane mais pas en flexion.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^o = \begin{Bmatrix} 0.18 \\ -0.22 \\ -0.026 \end{Bmatrix} \times 10^{-4}, \quad \boldsymbol{\chi} = \begin{Bmatrix} -2.8 \\ 10.6 \\ -0.9 \end{Bmatrix} \frac{1}{\text{m}}.$$

Tableau des contraintes

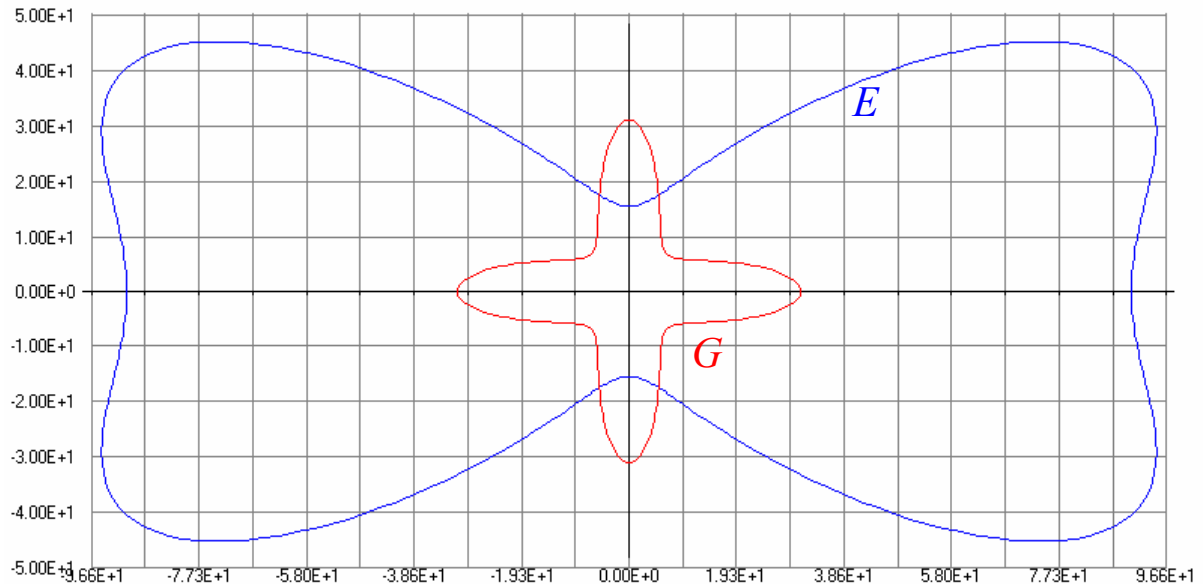
Load	Ply	Mat	Level	z	sigma xx	sigma yy	sigma xy	sigma 11	sigma 22	sigma 12
#	#	#		mm	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
1	1	5	bot	-0.313E+00	0.639681E+01	-0.437769E+02	-0.726609E+01	-0.124392E+02	-0.249408E+02	-0.253589E+02
			mid	-0.250E+00	0.533145E+01	-0.350229E+02	-0.572977E+01	-0.971926E+01	-0.199721E+02	-0.203388E+02
			up	-0.188E+00	0.426610E+01	-0.262689E+02	-0.419346E+01	-0.699929E+01	-0.150035E+02	-0.153188E+02
2	5	bot	-0.188E+00	-0.142106E+02	-0.331060E+02	0.167182E+02	-0.334129E+02	-0.139037E+02	0.165410E+02	
		mid	-0.125E+00	-0.902330E+01	-0.220383E+02	0.109434E+02	-0.217543E+02	-0.930724E+01	0.1111073E+02	
		up	-0.625E-01	-0.383598E+01	-0.109705E+02	0.516861E+01	-0.100958E+02	-0.471074E+01	0.567365E+01	
3	5	bot	-0.625E-01	0.336190E+02	-0.653083E+01	0.395021E+00	0.336190E+02	-0.653083E+01	0.395021E+00	
		mid	0.000E+00	0.315727E+01	-0.180625E+00	-0.186098E-01	0.315727E+01	-0.180625E+00	-0.186098E-01	
		up	0.625E-01	-0.273045E+02	0.616958E+01	-0.432240E+00	-0.273045E+02	0.616958E+01	-0.432240E+00	
4	5	bot	0.625E-01	0.653866E+01	0.111649E+02	-0.638099E+01	0.132213E+02	0.448226E+01	-0.519373E+01	
		mid	0.125E+00	0.117260E+02	0.222327E+02	-0.121558E+02	0.248799E+02	0.907876E+01	-0.106274E+02	
		up	0.188E+00	0.169133E+02	0.333004E+02	-0.179306E+02	0.365384E+02	0.136753E+02	-0.160611E+02	
5	5	bot	0.188E+00	-0.212604E+01	0.262551E+02	0.502445E+01	0.932054E+01	0.148085E+02	0.148016E+02	
		mid	0.250E+00	-0.319140E+01	0.350091E+02	0.656077E+01	0.120405E+02	0.197772E+02	0.198217E+02	
		up	0.313E+00	-0.425676E+01	0.437631E+02	0.809708E+01	0.147605E+02	0.247458E+02	0.248417E+02	



### Tableau des facteurs de chargement

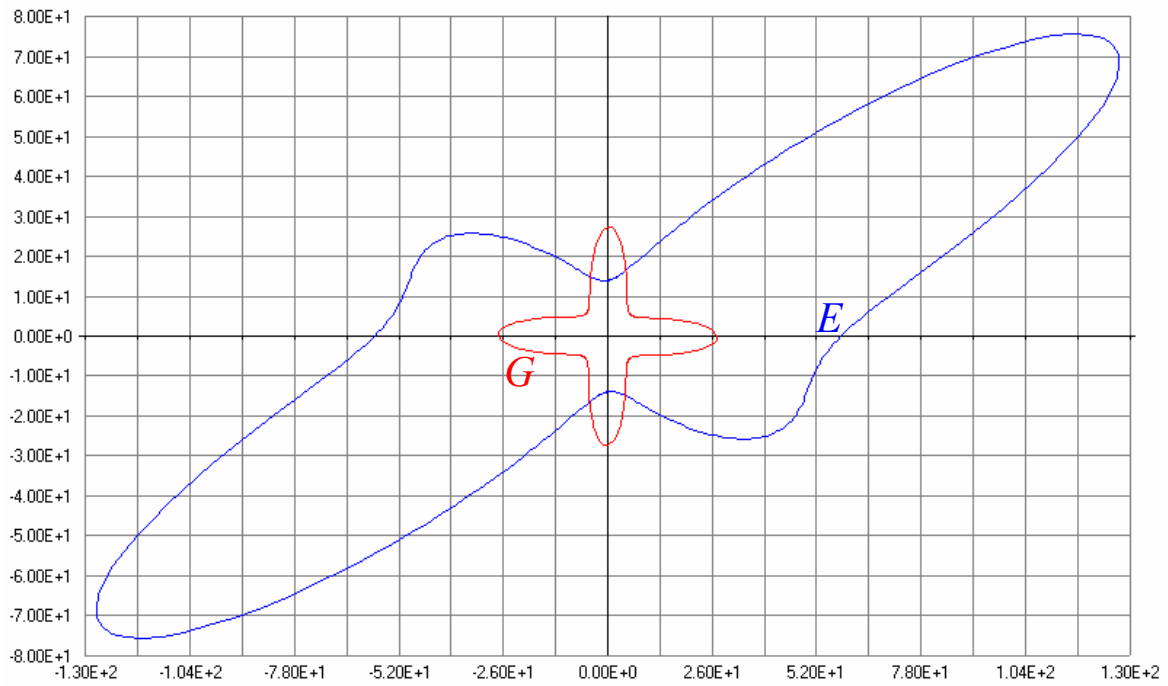
Load #	Ply #	Level	Maximum stress			Maximum strain			Tsai-Hill	Hoffmann	Tsai-Wu
			x	y	s	x	y	s			
1	1	bot	-.138E-01	-.227E+00	0.362E+00	-.606E-02	-.225E+00	0.362E+00	0.182E+00	-.188E+00	-.188E+00
		mid	-.108E-01	-.182E+00	0.291E+00	-.459E-02	-.180E+00	0.291E+00	0.117E+00	-.197E+00	-.197E+00
		up	-.778E-02	-.136E+00	0.219E+00	-.311E-02	-.135E+00	0.219E+00	0.664E-01	-.183E+00	-.183E+00
2	2	bot	-.371E-01	-.126E+00	0.236E+00	-.328E-01	-.122E+00	0.236E+00	0.726E-01	-.151E+00	-.151E+00
		mid	-.242E-01	-.846E-01	0.159E+00	-.213E-01	-.815E-01	0.159E+00	0.327E-01	-.125E+00	-.125E+00
		up	-.112E-01	-.428E-01	0.811E-01	-.975E-02	-.414E-01	0.811E-01	0.847E-02	-.754E-01	-.754E-01
3	3	bot	0.240E-01	-.594E-01	0.564E-02	0.253E-01	-.642E-01	0.564E-02	0.425E-02	-.128E+00	-.128E+00
		mid	0.226E-02	-.164E-02	0.266E-03	0.229E-02	-.210E-02	0.266E-03	0.814E-05	-.475E-02	-.475E-02
		up	-.303E-01	0.176E+00	0.617E-02	-.323E-01	0.189E+00	0.617E-02	0.322E-01	0.142E+00	0.142E+00
4	4	bot	0.944E-02	0.128E+00	0.742E-01	0.855E-02	0.122E+00	0.742E-01	0.220E-01	0.929E-01	0.929E-01
		mid	0.178E-01	0.259E+00	0.152E+00	0.160E-01	0.248E+00	0.152E+00	0.905E-01	0.212E+00	0.212E+00
		up	0.261E-01	0.391E+00	0.229E+00	0.234E-01	0.374E+00	0.229E+00	0.206E+00	0.354E+00	0.354E+00
5	5	bot	0.666E-02	0.423E+00	0.211E+00	0.370E-02	0.419E+00	0.211E+00	0.224E+00	0.386E+00	0.386E+00
		mid	0.860E-02	0.565E+00	0.283E+00	0.464E-02	0.560E+00	0.283E+00	0.399E+00	0.562E+00	0.562E+00
		up	0.105E-01	0.707E+00	0.355E+00	0.559E-02	0.700E+00	0.355E+00	0.626E+00	0.761E+00	0.761E+00

**Remarque:** pour les critères de la contrainte maximale et de la déformation maximale, le facteur de chargement est le rapport entre la contrainte, ou la déformation, et sa valeur admissible; la vérification est satisfaite si ce facteur est donc inférieur à 1. Dans les autres critères, le premier membre des différentes expressions est directement le facteur de chargement.



Graphiques du module d'Young et de cisaillement en membrane (MPa)





Graphiques du module d'Young et de cisaillement en flexion (MPa)

Versailles, 23/10/2005  
P. Vannucci

UVSQ - LISV  
Master DSME  
P. Vannucci



# *Méthodes Avancées en Optimisation des Structures*

**Conception optimale des composites**



# Introduction

- L'utilisation des matériaux composites dans la réalisation des structures offre aux concepteurs des possibilités nouvelles, car les composites structuraux ont de **très bons rapports rigidité/densité et résistance/densité**
- Leur utilisation impose par contre, d'un côté la prise en compte de phénomènes et comportements nouveaux par rapport aux matériaux classiques et d'un autre côté la **nécessité de concevoir le matériaux par rapport à l'usage prévu**
- Une nouvelle branche de la conception de structures a donc vu le jour: la **conception optimale du matériau**

# Qu'est-ce que c'est qu'un matériau composite?

- **Composite:** matériau composé de l'union d'au moins deux matériaux constituants (les *phases*), généralement distingués en :
  - **Matrice**
  - **Fibres**
  - **Charges**
  
- Caractéristiques mécaniques fondamentales des composites sont:
  - **l'hétérogénéité**
  - **l'anisotropie** (pas toujours)
  
- Les composites sont employés depuis des millénaires: briques en argile et paille, arcs et arbalètes en bois et tendons d'animaux, épées en alliages différents...

# Exemples typiques (et atypiques) de composites

Classe	Exemple	Composantes	Applications
Composites à matrice organique	carton pneus <b>stratifiés</b>	cellulose caoutchouc, acier résines organiques, fibres de verre, carbone, bore etc.	emballages etc. transports structures légères
	plastiques renforcées	résines, fibres courtes	diverses
Composites à matrice minérale	béton	ciment, sable, additifs	génie civil
	composites C-C	C, fibres de C	aérospatial, aviation, sport, biomécanique
	composites céramiques	céramiques et fibres céramiques	composantes thermomécaniques
Composites à matrice métallique		Al/fibres de B Al/fibres de C	aérospatial
Alliages	aciers Alliages d'Al cuvres	C, Fe, Mn, Cr, Al, Cu, Sn etc.	diverses



# *Les concepts clés des composites*

- Réunir en un seul deux ou plusieurs matériaux à caractéristiques différentes, qui n'ont pas, séparés, des caractéristiques de valeur, mais qui ensemble forment un matériau avec des propriétés importantes: **c'est l'union qui fait la force!**
  
- Les fibres utilisées comme renfort ont des propriétés mécaniques **nettement meilleures** (résistance et rigidité) du même matériau en forme massive: la diminution des dimensions caractéristiques implique, souvent, une amélioration des prestations mécaniques car la fibre a, par le procédé de fabrication, **une structure plus parfaite du matériau massif** et parce que **la probabilité de trouver des défauts importants diminue avec les dimensions**

# *Les raisons de l'utilisation des composites*

- Le développement des composites modernes est dû essentiellement aux besoins de plus en plus poussés de l'industrie, surtout dans les secteurs
  - Aérospatial
  - Aéronautique
  - Défense
  - Sport
  - Biomécanique
  
- Dans tous ces secteurs les impératifs de **légèreté, rigidité et résistance** rendent les composites indispensables

# *Types de matériaux composites structuraux*

- **Composites à fibres courtes:** fibres dispersées dans une matrice isotrope, généralement sans orientation préférentielle; comportement macroscopique **isotrope**
- **Composites à fibres longues:** fibres longues noyées dans une matrice isotrope avec orientation établie; comportement macroscopique **anisotrope**
- **Stratifiés:** superposition de plis en composite diversement orientés; **le comportement macroscopique doit être projeté**
- **Sandwiches:** panneaux ou coques conçus pour des sollicitation de flexion; généralement, le comportement dans le plan est **isotrope**





# *Constituants principaux des composites à matrice organique*

## ■ **Matrices:**

- **Résines époxydiques**
- **Résines polyuréthanes**
- **Résines polyamides**
- **Résine phénoliques**

## ■ **Fibres:**

- **verre**
- **carbone**
- **bore**
- **kevlar**
- **béryllium**

# Caractéristiques générales des composites

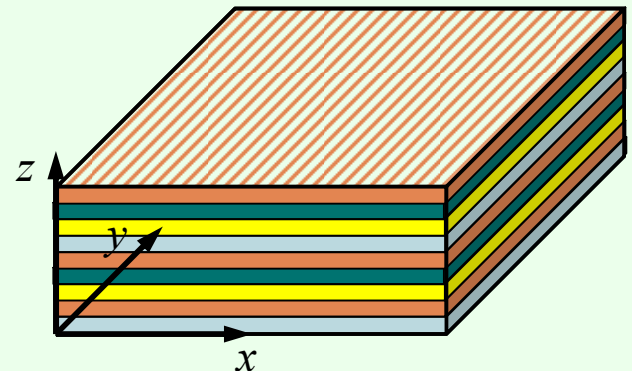
- Les qualités principales sont:
  - légèreté
  - résistance
  - rigidité
  - bon comportement à la fatigue
  - possibilité de concevoir le matériau selon la nécessité
  
- Les défauts principaux sont
  - sensibilité aux agents atmosphériques (rayons UV, humidité, température)
  - faible tenue au feu
  - coût
  
- Les paramètres synthétiques d'évaluation des performances mécaniques d'un composite sont les rapports  $E/\rho$  e  $\sigma_{lim}/\rho$

# Données typiques des composants

	Materiau	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	E MPa	$\sigma_u$ MPa	E/ $\rho$ (A) MN m/kg	$\sigma_u/\rho$ (B) kN m/kg	$\rho/\rho_{ac}$	E/E <sub>ac</sub>	$\sigma_u/\sigma_{u ac}$	A/A <sub>ac</sub>	B/B <sub>ac</sub>
Forme massive	Acier	7850	210000	360	26,75	45,86	1	1	0,171	1	1
	Acier haute rés.	7850	210000	2100	26,75	267,52	1	1	1,000	1	5,83
	Alliages d'Al	2700	70000	620	25,93	229,63	0,34	0,33	0,295	0,97	5,01
	Bois	500	30000	15	60,00	30,00	0,06	0,14	0,007	2,24	0,65
	Verre	2500	70000	2100	28,00	840,00	0,32	0,33	1,000	1,05	18,32
	Tungstène	19300	350000	4100	18,13	212,44	2,46	1,67	1,952	0,68	4,63
	Berillium	1830	300000	700	163,93	382,51	0,23	1,43	0,333	6,13	8,34
	Tytane	4610	115000	1900	24,95	412,15	0,59	0,55	0,905	0,93	8,99
Fibres	Verre E	2540	72400	3500	28,50	1377,95	0,32	0,34	1,667	1,07	30,05
	Verre S	2480	85500	4600	34,48	1854,84	0,32	0,41	2,190	1,29	40,45
	Carbone	1380	190000	1700	137,68	1231,88	0,18	0,90	0,810	5,15	26,86
	Carbone HM	1900	390000	2100	205,26	1105,26	0,24	1,86	1,000	7,67	24,10
	Carbone HR	1850	240000	3500	129,73	1891,89	0,24	1,14	1,667	4,85	41,25
	Kevlar	1500	130000	2800	86,67	1866,67	0,19	0,62	1,333	3,24	40,70
	Bore	2630	385000	2800	146,39	1064,64	0,34	1,83	1,333	5,47	23,22
	Berillium	1830	300000	1700	163,93	928,96	0,23	1,43	0,810	6,13	20,26
Matrices	Polyester	1200	3000	80	2,50	66,67	0,15	0,01	0,038	0,09	1,45
	Phénoliques	1200	3000	60	2,50	50,00	0,15	0,01	0,029	0,09	1,09
	Epoxydes	1500	5000	100	3,33	66,67	0,19	0,02	0,048	0,12	1,45
	Polyamides	1140	2500	85	2,19	74,56	0,15	0,01	0,040	0,08	1,63

# Les stratifiés

- Les stratifiés sont, avec les panneaux sandwich, les matériaux composites qui ont les meilleures performances structurales
- L'idée de base est celle de superposer des couches anisotropes, renforcées avec des fibres longues, uni- ou bi- directionnelles, en orientant les couches de sorte à **obtenir un matériau final ayant les propriétés souhaitées**, en terme de comportement élastique, rigidité, résistance etc.
- La **conception du matériau** devient donc une phase de la conception structurale
- Dans la suite, on s'intéressera à certains problèmes de conception optimale des stratifiés



# Quelques rappels de mécanique (1)

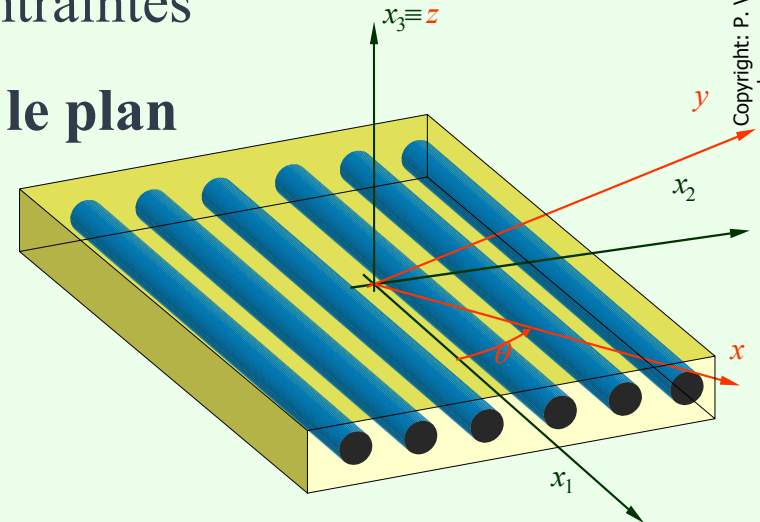
- **Hypothèse de base:** état plan des contraintes
- **Le comportement orthotrope dans le plan**  
(notation de Voigt):

- dans les axes, repère  $\{x_1, x_2, x_3\}$

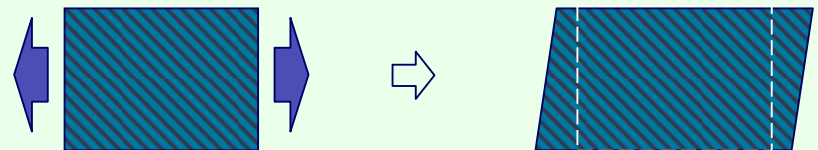
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

- hors axes: repère  $\{x, y, z\}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix}$$



- Les  $Q_{xs}$  et  $Q_{ys}$  couplent contraintes normales et distorsions



## Quelques rappels de mécanique (2)

- **Changement de repère:** les composantes de  $\mathbf{Q}$  se transforment comme combinaison des puissance d'ordre 4 des fonctions circulaires  $c$  et  $s$  de  $\theta \rightarrow$  ceci constitue une difficulté majeure dans les pb de conception où les orientations des couches figurent parmi les variables de conception (toujours avec les stratifiés)

$$Q_{xx} = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4$$

$$Q_{xy} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4)$$

$$Q_{yy} = Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}c^4$$

$$Q_{xs} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c$$

$$Q_{ys} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3$$

$$Q_{ss} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4)$$

$$c = \cos \theta$$

$$s = \sin \theta$$

# Quelques rappels de mécanique (3)

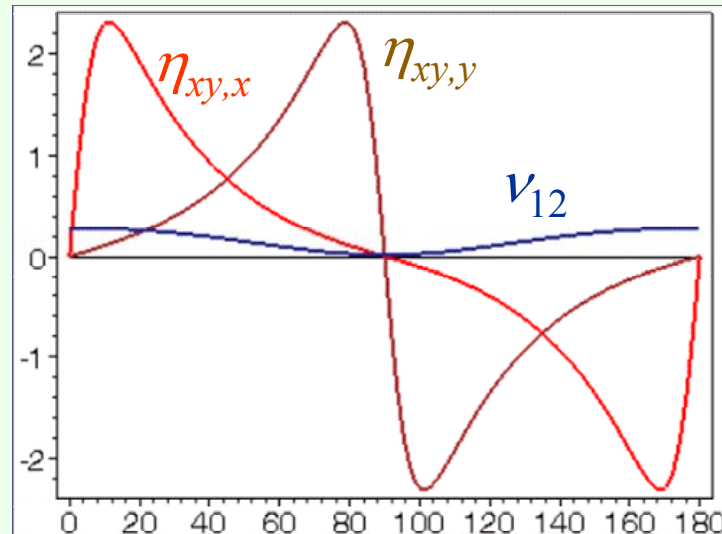
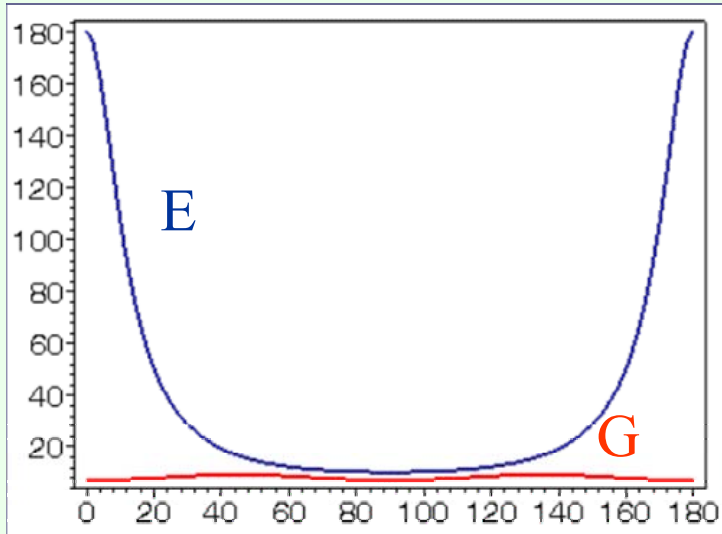
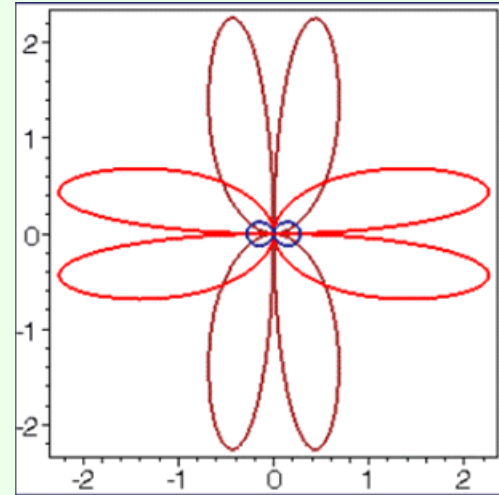
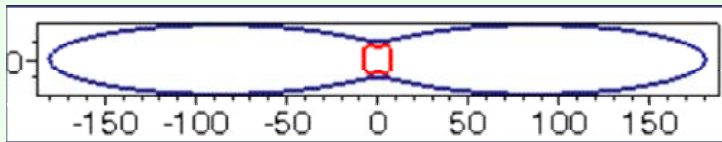
- Modules de l'ingénieur

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}^{-1}$$
$$E_x = \frac{1}{S_{xx}}, \quad E_y = \frac{1}{S_{yy}}, \quad \nu_{xy} = -\frac{S_{xy}}{S_{xx}},$$
$$G_{xy} = \frac{1}{S_{ss}}, \quad \eta_{xy,x} = \frac{S_{xs}}{S_{xx}}, \quad \eta_{xy,y} = \frac{S_{ys}}{S_{yy}}.$$

- $\eta_{xy,x}$  e  $\eta_{xy,y}$ : coefficients d'influence mutuelle, nuls pour les matériaux isotropes et pour l'orthotropie dans les axes

# Quelques rappels de mécanique (4)

- Un exemple: couche en carbone-époxy,  $V_f=0.7$





# Quelques rappels de mécanique (5)

- **Théories d'homogénéisation:** permettent de calculer les caractéristiques mécaniques du matériaux homogénéisé à partir des caractéristiques des phases et de la fraction volumique  $V_f$
- Théorie classique (lois des mélanges)

$$\begin{aligned} E_1 &= V_f E_f + (1 - V_f) E_m \\ \nu_{12} &= V_f \nu_f + (1 - V_f) \nu_m \\ E_2 &= \frac{E_f E_m}{V_f E_m + (1 - V_f) E_f} \\ G_{12} &= \frac{G_f G_m}{V_f G_m + (1 - V_f) G_f} \end{aligned}$$

# Quelques rappels de mécanique (6)

- **Critères de résistance:** l'anisotropie et l'hétérogénéité obligent la formulation de critères de résistance *ad hoc*
- Critère de la contrainte max

$$\begin{aligned} -X_c < \sigma_1 < X_t \\ -Y_c < \sigma_2 < Y_t \\ |\sigma_6| < S \end{aligned}$$

- Critère de Tsai-Hill

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{S}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} = 1$$

- Critère de Tsai-Wu

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} + \frac{X_c - X_t}{X_t X_c} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c} \sigma_2 + 2F_{12}^* \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_t X_c} = 1$$

# Quelques rappels de mécanique (7)

## ■ La théorie classique des stratifiés

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k(\delta_k)(z_k - z_{k-1});$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k(\delta_k)(z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k(\delta_k)(z_k^3 - z_{k-1}^3);$$



**A:** tenseur du comportement de membrane

**D:** tenseur du comportement de flexion

**B:** tenseur de couplage

# Quelques rappels de mécanique (8)

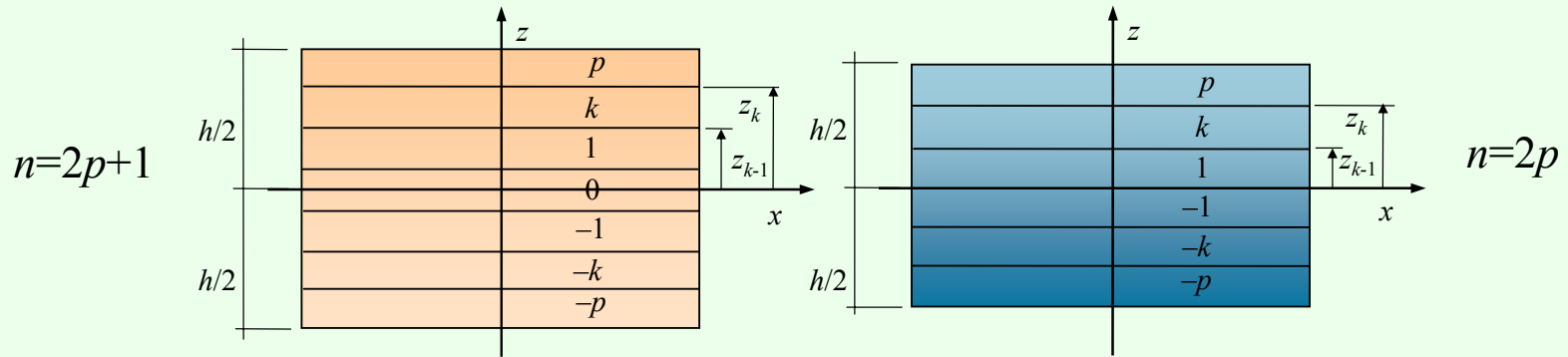
- **Caractéristiques du comportement des stratifiés**
- En général  $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$   $\rightarrow$  couplage membrane-flexion
- Une condition **suffisante** pour éliminer le couplage est d'utiliser une séquence symétrique
- Normalisation des tenseurs:

$$\mathbf{A}^* = \frac{\mathbf{A}}{h}, \quad \mathbf{B}^* = \frac{2\mathbf{B}}{h^3}, \quad \mathbf{D}^* = \frac{12\mathbf{D}}{h^3}$$

- En général  $\mathbf{A}^* \neq \mathbf{D}^*$   $\rightarrow$  propriétés élastiques différentes en membrane et flexion
- $\mathbf{C} = \mathbf{A}^* - \mathbf{D}^*$ : tenseur d'homogénéité; si  $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{O}$  le stratifié est dit *quasi-homogène*

# Quelques rappels de mécanique (9)

## ■ Stratifiés à plis identiques



$$\mathbf{A} = h_L \sum_{k=-p}^p \mathbf{Q}_k$$

$$h_L = h/n$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} h_L^2 \sum_{k=-p}^p b_k \mathbf{Q}_k$$

$$b_k = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 2p + 1 \\ 2k - k/|k|, & b_0 = 0 \end{cases} \quad \text{si } n = 2p$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} h_L^3 \sum_{k=-p}^p d_k \mathbf{Q}_k$$

$$d_k = \begin{cases} (12k^2 + 1)/4 & \text{si } n = 2p + 1 \\ 3k^2 - 3|k| + 1, & d_0 = 0 \end{cases} \quad \text{si } n = 2p$$

# Quelques rappels de mécanique (10)

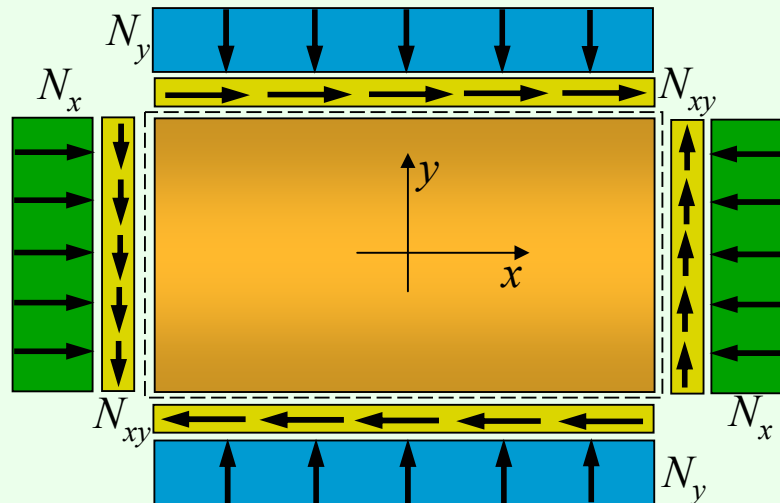
- Les propriétés de membrane sont plus facilement traitées, car **A** ne dépend pas de la position des couches
- Concevoir en flexion est beaucoup plus difficile
- Restreindre la recherche de stratifiés à la classe des séquences symétriques est extrêmement limitatif (Vannucci & Verchery, 2001)
- Classes particulières de stratifiés:

	<b>Cross-ply</b> [0°/90°]	<b>Angle-ply</b> [±α] <sub>n</sub>	<b>Equilibrés</b> [±α <sub>1</sub> ±α <sub>2</sub> ±α <sub>n</sub> ]	<b>Quasi-isot.</b> [0°/±45°/90°]	<b>Séq. Werren &amp; Norris</b>
<b>A</b>	orthotrope	orthotrope	orthotrope	orthotrope	isotrope
<b>D</b>	orthotrope	anisotrope	anisotrope	anisotrope	anisotrope

# Quelques rappels de mécanique (11)

- **Stabilité et bifurcation:**
- Équation linéarisée de flambement (pour stratifiés avec  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ) avec chargement exclusivement dans le plan

$$D_{11}w_{,xxxx} + 4D_{16}w_{,xxxxy} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy} + 4D_{26}w_{,xyyy} + D_{22}w_{,yyyy} = N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}$$



# Quelques rappels de mécanique (12)

- Fréquences propres
- Équation linéarisée

$$D_{11} w_{,xxxx} + 4D_{16} w_{,xxxy} + 2(D_{12} + 2D_{66}) w_{,xxyy} + 4D_{26} w_{,xyyy} + D_{22} w_{,yyyy} = q + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}$$

$$q = -\mu \ddot{w}$$

- $\mu$ : masse par unité de surface de la plaque



# Quelques rappels de mécanique (13)

- Les paramètres de Tsai et Pagano (1967)
- La transformation des composantes de  $\mathbf{Q}$  par rotation  $\theta$  de repère (page 13) peut être exprimée en fonction des angles  $2\theta$  et  $4\theta$  et de 7 paramètres  $U_i$ , dits les paramètres de Tsai et Pagano

$$\begin{aligned} Q_{xxxx}(\theta) &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + 2U_6 \sin 2\theta + U_3 \cos 4\theta + U_7 \sin 4\theta \\ Q_{xyyy}(\theta) &= U_5 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta \\ Q_{xxyy}(\theta) &= U_4 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta \\ Q_{yyxx}(\theta) &= U_4 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta \\ Q_{xxyx}(\theta) &= 2U_6 \cos 2\theta - U_2 \sin 2\theta + 2U_7 \cos 4\theta - 2U_3 \sin 4\theta \\ Q_{yyxy}(\theta) &= 2U_6 \cos 2\theta - U_2 \sin 2\theta - 2U_7 \cos 4\theta + 2U_3 \sin 4\theta \\ Q_{xyxy}(\theta) &= U_5 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta \end{aligned}$$

# Quelques rappels de mécanique (14)

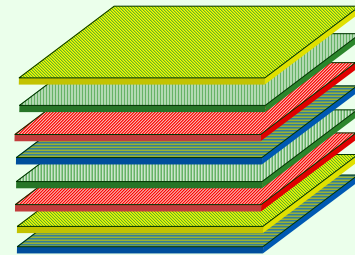
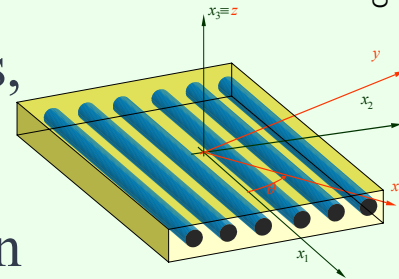
- Les paramètres  $U_i$  sont exprimés en fonction des composantes de  $\mathbf{Q}$  dans le repère de base ( $\theta = 0$ )

$U_1 = \frac{3Q_{11} + 2Q_{12} + 3Q_{22} + 4Q_{66}}{8},$	$U_2 = \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2}$
$U_3 = \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8},$	$U_4 = \frac{Q_{11} + 6Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8}$
$U_5 = \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} + 4Q_{66}}{8},$	$U_6 = \frac{Q_{16} + Q_{26}}{2}$
$U_7 = \frac{Q_{16} - Q_{26}}{2}$	$U_1 - U_4 = 2U_5$

- $U_6$  et  $U_7$  sont nuls pour les matériaux orthotropes si le repère de base est celui d'orthotropie
- Contrairement à ce qui est affirmé souvent, les  $U_i$  ne sont pas tous des invariants tensoriels, mais ils dépendent du repère de base choisi; en effet, seulement  $U_1$ ,  $U_4$  et  $U_5$  sont invariants (voir pages 43 et 44)

# La conception d'un stratifié

- La conception d'une structure en composite comporte la **conception du matériau même**
- Paramètres de la conception: phases, orientations, nombre de couches etc.
- Problèmes typiques de la conception optimale d'un stratifié: minimisation du poids, maximisation de la rigidité et/ou de la résistance, de la charge critique, de la fréquence des vibrations, minimisation des contraintes de délaminage etc.
- Mais aussi conception de *propriétés élastiques fondamentales*: orthotropie, couplage, isotropie etc.



# *Caractéristiques des pb d'optimisation des stratifiés (1)*

- Typologie des variables: continues, discrètes, groupées
- Multiplicité des objectifs
- Forte **non-linéarité et multi-modalité**, avec, parfois, solutions non isolées
- Nombre de variables élevé
- Comportement mécanique complexe (couplages, différence de comportement en membrane et en flexion, etc.)

**Mais surtout....**

# Caractéristiques des pb d'optimisation des stratifiés (2)

- ... difficultés liées à la représentation mathématique des tenseurs: la représentation cartésienne comporte des relations de transformation par rotation complexes et **ne s'appuyant pas sur des quantités invariantes** ( $s = \sin \theta$ ,  $c = \cos \theta$ ):

$$Q_{xx} = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4$$

$$Q_{xy} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4)$$

$$Q_{yy} = Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}c^4$$

$$Q_{xs} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c$$

$$Q_{ys} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3$$

$$Q_{ss} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4)$$

# Résultats et méthodes classiques

- Les premiers travaux sur l'optimisation des stratifiés remontent aux années 70
- Les travaux concernent normalement des propriétés mécaniques classiques:
  - maximisation de la rigidité
  - maximisation des fréquences propres
  - maximisation de la charge critique
- D'autres travaux concernent au contraire des propriétés spécifiques de stratifiés:
  - minimisation des coefficients de dilatation thermique dans une ou plusieurs directions
  - distribution optimale des axes d'orthotropie
- Dans la suite, on passe en revue certains résultats classiques pour les stratifiés
- On fera dorénavant l'hypothèse de **stratifiés à plis identiques**, nécessaire pour avoir des résultats de validité générale
- En outre, toutes les solutions qui suivent considèrent seulement des **séquences symétriques**, pour obtenir automatiquement le découplage entre membrane et flexion

# Les lamination parameters (1)

- C'est une technique (Miki, 1982) de décomposition des paramètres qui influencent le comportement élastique d'un stratifié en parties invariantes et en parties dépendantes de l'empilement (les *lamination parameters*)
- De cette sorte on sépare tous ce qui dépend du matériau de base de tous ce qui est essentiellement géométrique (séquence d'empilement et orientations)
- Si le choix du matériau de base est faite au préalable, les seuls paramètres qui influencent la variation du comportement élastique ce sont justement les *lamination parameters*
- Cette technique s'appuie sur les paramètres de Tsai et Pagano (pages 24 et 25)

# Les lamination parameters (2)

- Comportement de membrane
- Si le matériau de base est orthotrope et le repère de base est celui d'orthotropie, le tenseur  $\mathbf{A}$  peut être exprimé en fonction des 5 premiers paramètres  $U_i$  et de 4 lamination parameters  $\xi_i$ :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \\ A_{66} \\ A_{16} \\ A_{26} \end{Bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 0 & 1 \\ 0 & \xi_3/2 & \xi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3/2 & -\xi_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$



## Les lamination parameters (3)

- Les paramètres  $U_i$ , sont ceux de Tsai et Pagano:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{3Q_{11} + 2Q_{12} + 3Q_{22} + 4Q_{66}}{8}, & U_2 &= \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2} \\ U_3 &= \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8}, & U_4 &= \frac{Q_{11} + 6Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8} \\ U_5 &= \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} + 4Q_{66}}{8}, \end{aligned}$$

- Ces paramètres ne dépendent que du matériau choisi pour les plis, et donc sont des **constants dans un processus d'optimisation** où le matériau est choisi au préalable
- D'autres auteurs donnent une définition un peu différente des paramètres  $U_i$

# Les lamination parameters (4)

- Les paramètres  $\xi_i$  pour  $\mathbf{A}$  sont:

$$\xi_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \cos 2\theta_k$$

$$\xi_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \cos 4\theta_k$$

$$\xi_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 2\theta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \sin 2\theta_k$$

$$\xi_4 = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 4\theta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \sin 4\theta_k$$

- Les paramètres  $\xi_3$  et  $\xi_4$  entrent seulement dans les expressions de  $A_{16}$  et  $A_{26}$ : ils n'affectent pas le calcul des stratifiés orthotropes en membrane

# Les lamination parameters (5)

- **Comportement de flexion:**

- On a des résultats analogues à ceux de membrane, varient seulement les *lamination parameters*

$$\begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{12} \\ D_{66} \\ D_{16} \\ D_{26} \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & \xi_9 & \xi_{10} & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_9 & \xi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{10} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{10} & 0 & 1 \\ 0 & \xi_{11}/2 & \xi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{11}/2 & -\xi_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

# Les lamination parameters (6)

- Les paramètres  $\xi_i$  pour  $\mathbf{D}$  sont:

$$\xi_9 = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cos 2\theta \, dz = \frac{4}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \cos 2\theta_k$$

$$\xi_{10} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cos 4\theta \, dz = \frac{4}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \cos 4\theta_k$$

$$\xi_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \sin 2\theta \, dz = \frac{4}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \sin 2\theta_k$$

$$\xi_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \sin 4\theta \, dz = \frac{4}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \sin 4\theta_k$$

- Les paramètres  $\xi_{11}$  et  $\xi_{12}$  entrent seulement dans les expressions de  $D_{16}$  et  $D_{26}$ : ils n'affectent pas le calcul des stratifiés orthotropes en flexion

# Optimisation des propriétés de membrane (1)

- **Résultat général** (Sacchi-Landriani & Rovati, 1991): la maximisation de la rigidité de couches unidirectionnelles on l'a lorsque les axes d'orthotropie coïncident avec les axes principales de la contrainte et de la déformation
- Si l'on considère des stratifiés équilibrés (pour chaque couche à  $\alpha$  il y en a une à  $-\alpha$ ) ou *cross-ply* ou *angle-ply*  $\mathbf{A}$  est orthotrope  $\rightarrow A_{16}=A_{26}=0$  et seulement les paramètres  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont non nuls
- On peut montrer que

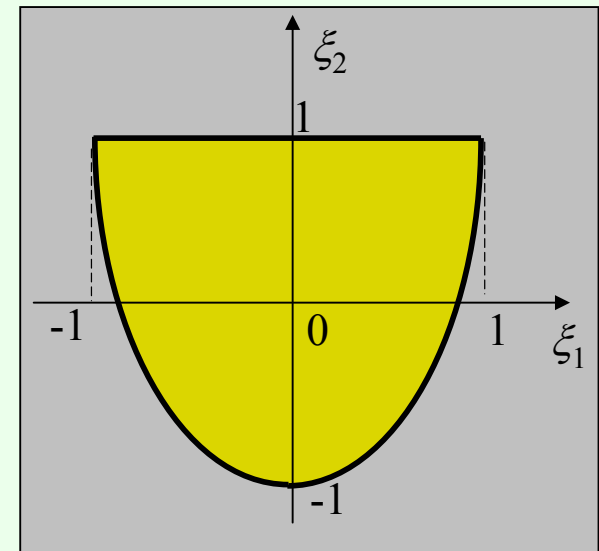
$$-1 \leq \xi_1 \leq 1, \quad 2\xi_1^2 - 1 \leq \xi_2 \leq 1$$

- L'idée est celle de travailler dans l'espace  $\{\xi_1, \xi_2\}$  et ensuite de remonter aux orientations

## Optimisation des propriétés de membrane (2)

- Si l'on prends  $\xi_1$  et  $\xi_2$  comme variables de conception, le domaine de faisabilité est une parabole et chaque point de ce domaine (*lamination point*) correspond à un certain tenseur  $\mathbf{A}$

- On peut montrer que:
  - les points sur le segment  $\xi_2=1$  représentent des stratifiés *cross-ply*
  - les points sur la parabole  $\xi_2=\xi_1^2-1$  représentent des stratifiés *angle-ply*



# Optimisation des propriétés de membrane (3)

- **Optimisation de la rigidité de membrane**
- Les constantes de l'ingénieur en membrane sont, dans les hypothèses vues,

$$E_1 = \frac{1}{h} \left( A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right), \quad E_2 = \frac{1}{h} \left( A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right), \quad G_{12} = \frac{A_{66}}{h}, \quad \nu_{12} = \frac{A_{12}}{A_{22}}$$

- En termes de *lamination parameters* on a

$$E_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{h} \left[ U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3 - \frac{(U_4 - \xi_2 U_3)^2}{U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3} \right],$$
$$E_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{h} \left[ U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3 - \frac{(U_4 - \xi_2 U_3)^2}{U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3} \right],$$
$$G_{12}(\xi_2) = \frac{U_5 - \xi_2 U_3}{h}, \quad \nu_{12}(\xi_1, \xi_2) = \frac{U_4 - \xi_2 U_3}{U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3}.$$

# Optimisation des propriétés de membrane (4)

- **Cas fréquent: maximisation de  $E_1$**
- Il s'agit donc du NLPP standard:

$$\min -E_1(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{h} \left[ U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3 - \frac{(U_4 - \xi_2 U_3)^2}{U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3} \right]$$

avec  $\xi_1 \leq 1, \quad -\xi_1 \leq 1, \quad \xi_2 \leq 1, \quad -\xi_2 \leq 1 - \xi_1^2$

- Ce problème n'est pas, en général, convexe, même si le domaine de faisabilité l'est



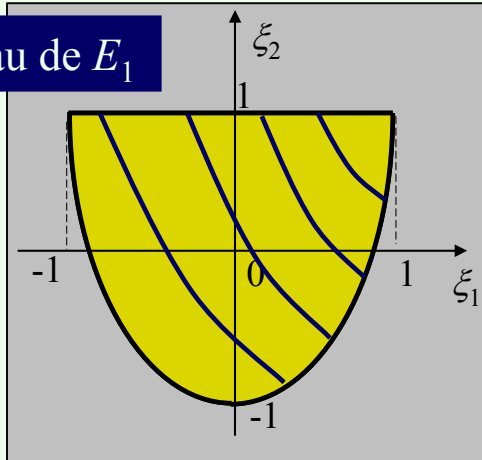
# Optimisation des propriétés de membrane (5)

- Recherche d'un stratifié avec des propriétés données
- Miki (1982) utilise la technique des *lamination parameters* pour déterminer un stratifié à propriétés élastiques données
- Pour cela, il trace les courbes des iso-valeurs des fonctions  $E_1(\xi_1, \xi_2)$ ,  $E_2(\xi_1, \xi_2)$ ,  $G_{12}(\xi_1, \xi_2)$  et  $\nu_{12}(\xi_1, \xi_2)$ :

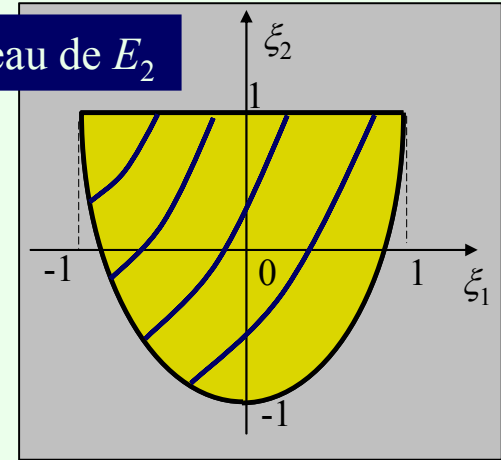
$$\xi_2 = \frac{U_2 \xi_1^2 - U_2 E_1 \xi_1 + E_1 U_1 - U_1^2 + U_4^2}{U_3 (2U_1 + 2U_4 - E_1)} \quad \text{courbes de niveau de } E_1$$
$$\xi_2 = \frac{U_2 \xi_1^2 + U_2 E_2 \xi_1 + E_2 U_1 - U_1^2 + U_4^2}{U_3 (2U_1 + 2U_4 - E_2)} \quad \text{courbes de niveau de } E_2$$
$$\xi_2 = \frac{U_5 - G_{12}}{U_3} \quad \text{courbes de niveau de } G_{12}$$
$$\xi_2 = \frac{\nu_{12} U_2 \xi_1 - \nu_{12} U_1 + U_4}{U_3 (1 + \nu_{12})} \quad \text{courbes de niveau de } \nu_{12}$$

# Optimisation des propriétés de membrane (6)

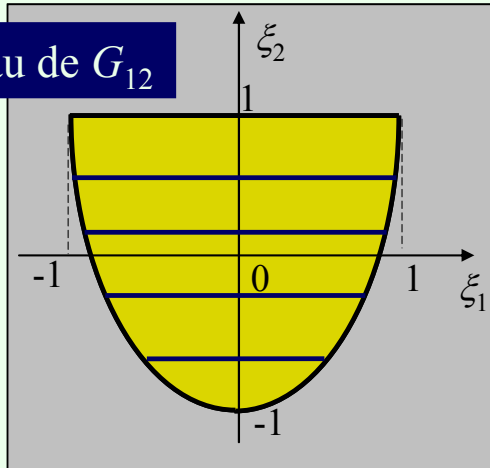
Courbes de niveau de  $E_1$



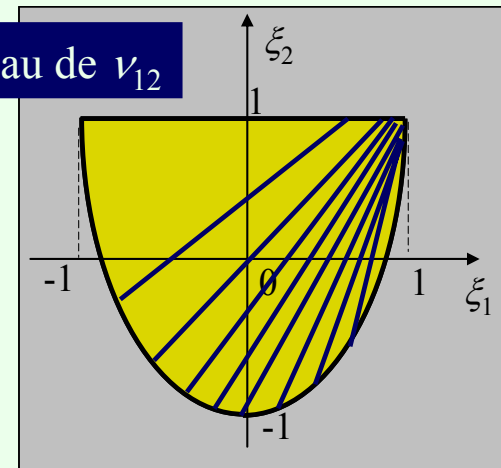
Courbes de niveau de  $E_2$



Courbes de niveau de  $G_{12}$

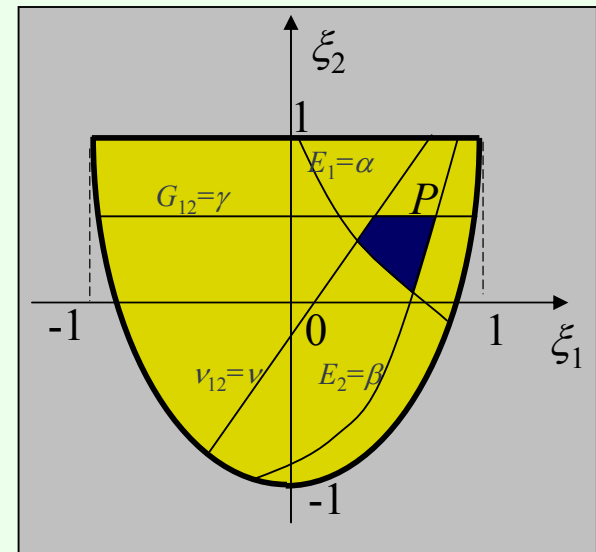


Courbes de niveau de  $\nu_{12}$



# Optimisation des propriétés de membrane (7)

- **Exemple:** recherche d'un stratifié avec  $E_1 > \alpha$ ,  $E_2 > \beta$ ,  $G_{12} > \gamma$ ,  $\nu_{12} < \nu$
- On cherche un matériau pour lequel le domaine de faisabilité, déterminé par les conditions ci-dessus, soit contenu dans la parabole du plan  $\{\xi_1, \xi_2\}$
- Dans le domaine de faisabilité, on détermine un point par une condition supplémentaire
- P. ex. si on impose  $E_1 = \max$ , le point correspondant est le point  $P \rightarrow$  on connaît donc la valeur des *lamination parameters*  $\xi_1$  et  $\xi_2$  de conception
- A partir des conditions imposées sur la séquence (ex. *angle-ply*) on remonte aux orientations grâce aux équations qui définissent les *lamination parameters*



$$\xi_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \cos 2\theta_k, \quad \xi_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \cos 4\theta_k$$

# Optimisation des propriétés de membrane (8)

- Maximisation de  $G_{12}$
- Il s'agit donc du NLPP standard:

$$\min -G_{12}(\xi_2) = \frac{\xi_2 U_3 - U_5}{h}$$

avec  $\xi_1 \leq 1, \quad -\xi_1 \leq 1, \quad \xi_2 \leq 1, \quad -\xi_2 \leq 1 - \xi_1^2$

- Ce problème est convexe, car la fonction objectif est linéaire et le domaine de faisabilité convexe  $\rightarrow$  la solution, en termes de  $\xi_2$ , est unique et on voit immédiatement qu'elle est

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = -1 \quad \text{si } U_3 > 0 \quad \text{séquence } \textit{angle-ply} \text{ de type } [\pm 45^\circ]$$
$$\xi_1 = \text{quelconque}, \xi_2 = 1 \quad \text{si } U_3 < 0 \quad \text{séquence } \textit{cross-ply}$$

- Normalement,  $U_3 > 0$  donc c'est une séquence *angle-ply* avec les angles  $\pm 45^\circ$  qui maximise  $G_{12}$  en membrane

# Optimisation des propriétés de flexion

- Le calcul en flexion est compliqué par le fait que généralement  $D_{16}$  et  $D_{26}$  ne sont pas nuls, surtout pour les séquences symétriques
- Plusieurs auteurs forcent alors l'orthotropie de  $\mathbf{D}$ , faisant l'hypothèse que  $D_{16}$  et  $D_{26}$  sont négligeables, **ce qui est faux**
- L'argument est que pour un nombre suffisant de couches ( $n > 6$ ) c'est à peu près vrai, mais on ne spécifie jamais les raisons de ça: c'est une hypothèse en principe fautive et montre les difficultés de la conception en flexion
- Même dans ce cas on peut montrer que

$$-1 \leq \xi_9 \leq 1, \quad 2\xi_9^2 - 1 \leq \xi_{10} \leq 1$$

et donc on a le même domaine de faisabilité en forme de parabole dans l'espace  $\{\xi_9, \xi_{10}\}$  et le même type d'approche

# Optimisation de la charge critique (1)

- Les auteurs considèrent le plus souvent des plaques rectangulaires, appuyées sur les bords et avec les axes d'orthotropie parallèles aux bords  $a$  et  $b$
- Comme ils utilisent normalement une séquence symétrique, les auteurs font implicitement l'hypothèse que  $D_{16}$  et  $D_{26}$  soient négligeables
- L'objectif est évidemment celui de maximiser la charge critique de bifurcation
- Si  $N_{12}=0$ , on peut trouver une solution en forme analytique

# Optimisation de la charge critique (2)

- Méthode de Rayleigh-Ritz: pour une plaque rectangulaire appuyée sur les bords on cherche une solution sous la forme

$$w = a_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}$$

- Dans ce cas, les charges critiques sont données par la relation

$$N_1 \left[ 1 + \frac{N_2}{N_1} \frac{a^2}{b^2} \frac{n^2}{m^2} \right] = - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left[ D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{a^2}{b^2} \frac{n^2}{m^2} + D_{22} \frac{a^4}{b^4} \frac{n^4}{m^4} \right]$$

- La charge critique est maximisée lorsque le terme entre crochets à deuxième membre est maximum → la solution dépend du rapport  $a/b$  et est donc différente pour les différents modes

# Optimisation de la charge critique (2)

- Le NLPP à résoudre est donc, en forme standard,

$$\min f(\xi_9, \xi_{10}) = - \left[ U_1 \left( 1 + \frac{n^4 a^4}{m^4 b^4} \right) + 2 \frac{n^2 a^2}{m^2 b^2} (U_4 + 2U_5) + \right. \\ \left. + \xi_9 U_2 \left( 1 - \frac{n^4 a^4}{m^4 b^4} \right) + \xi_{10} U_3 \left( 1 + \frac{n^4 a^4}{m^4 b^4} - 6 \frac{n^2 a^2}{m^2 b^2} \right) \right] \\ \text{avec } \xi_9 \leq 1, \quad -\xi_9 \leq 1, \quad \xi_{10} \leq 1, \quad -\xi_{10} \leq 1 - \xi_9^2$$

- La FO est linéaire et le NLPP est convexe
- Les lignes où la FO est constante sont des droites dans le plan  $\{\xi_9, \xi_{10}\} \rightarrow$  le max se trouve sur le bord du domaine de faisabilité
- Ceci implique que les séquences symétriques qui maximisent la charge critique pour des plaques rectangulaires orthotropes appuyées sur le contour sont des séquences *angle-ply*



# Optimisation des fréquences propres (1)

- Comme pour la charge critique, les auteurs considèrent le plus souvent des plaques rectangulaires, appuyées sur les bords et avec les axes d'orthotropie parallèles aux bords  $a$  et  $b$
- Encore une fois, comme ils utilisent normalement une séquence symétrique, les auteurs font implicitement l'hypothèse que  $D_{16}$  et  $D_{26}$  soient négligeables
- L'objectif plus commun est celui de maximiser la première fréquence propre
- D'autres fois, on cherche à maximiser un intervalle entre deux fréquences propres successives

# Optimisation des fréquences propres (2)

- Méthode de Rayleigh-Ritz: pour une plaque rectangulaire appuyée sur les bords, on cherche une solution sous la forme

$$w = a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \omega_{mn} t$$

- Dans ce cas, les fréquences propres sont données par la relation

$$\omega_{mn}^2 = \frac{m^4 \pi^4}{\mu a^4} \left[ D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{a^2}{b^2} \frac{n^2}{m^2} + D_{22} \frac{a^4}{b^4} \frac{n^4}{m^4} \right]$$

- La première fréquence propre est maximisée lorsque le terme entre crochets à deuxième membre est maximum → la solution est la même que pour la charge critique, car la FO est la même, ainsi que le domaine de faisabilité: les stratifiés qui maximisent la charge critique maximisent aussi la première fréquence propre

# Critique de l'état de l'art (1)

- La grande majorité des études ne cherche pas la vraie solution optimale à un problème donné
- En fait, le choix de chercher la solution dans une classe particulière de solutions (séquences symétriques, *cross-ply*, *angle-ply* etc.) diminue beaucoup l'espace de recherche et **élimine ainsi des nombreuses solutions, souvent optimales**
- Cette stratégie est utilisée pour **s'assurer *a priori* l'obtention de certaines propriétés**, difficiles à être obtenues en général (découplage, orthotropie de flexion etc.) et surtout difficiles à être mises en forme mathématique dans la formalisation d'un problème d'optimum
- La véritable formalisation d'un problème d'optimum doit, au contraire, **intégrer la spécification des propriétés élastiques**, sous forme soit de fonction objectif, soit de contraintes
- Les techniques modernes d'optimisation permettent d'aborder ce genre de problèmes

## Critique de l'état de l'art (2)

- Une autre limitation de beaucoup d'études (souvent celles qui s'appuient sur une méthode d'optimisation par métaheuristiques), concerne le choix, fait *a priori*, de l'ensemble d'orientations possibles, le plus souvent limitées au cas de stratifiés nommés quasi-isotropes  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]$
- Une justification de ce choix est technologique, mais aujourd'hui c'est une raison qu'on peut accepter de moins en moins; en outre, ce choix est extrêmement contraignant dans un processus d'optimum
- Du point de vue mathématique, la prise en compte des propriétés élastiques est mieux faite avec une **représentation tensorielle basée sur des invariants**
- La représentation cartésienne n'est, de ce point de vue, la plus adaptée
- Les paramètres de Tsai et Pagano ne sont pas non plus les plus indiqués, car ils ne représentent pas des quantités mécaniquement intéressantes, et ils ne sont pas tous des invariants

# *Une approche alternative à la conception optimale des stratifiés*

- La question est la suivante: est il possible de formaliser des problèmes **d'optimisation globale d'un stratifié**?
- A savoir, est-il possible de prendre en compte directement dans le processus de conception les propriétés élastiques (découplage, quasi-homogénéité, orthotropie etc.)?
- La réponse à ces questions passe par une nouvelle formulation, plus efficace, des problèmes d'optimum concernant les stratifiés, à partir de la représentation même des quantités mécaniques en jeu: les tenseurs de l'élasticité (**Q, A, B, D, C**)



# *La Méthode Polaire (1)*

- Verchery propose en 1979 une méthode pour la recherche des invariants d'un tenseur de l'élasticité plane, qui en plus permet de le représenter de façon simple en fonction de ses invariants
- La méthode perfectionne d'autres approches, notamment celle de Tsai et Pagano (1967)
- Elle suit une approche classique en physique mathématique: une transformation de variable complexe (Klein 1896, Michell 1902, Kolosov 1909, Muskhelishvili 1933, Green et Zerna 1954)

# La Méthode Polaire (2)

## ■ Transformation de Verchery

$$\text{Si } z = x + iy \quad \text{et} \quad k = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\mathbf{X}^{cont} = \mathbf{m}_1 \mathbf{x}, \quad \mathbf{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \bar{k} & k \\ k & \bar{k} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^{cont} = (X^1, X^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{k}z, k\bar{z})$$

$$\mathbf{X}_{cov} = \mathbf{g}_{cov} \mathbf{X}^{cont}$$

$$\mathbf{g}_{cov} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# La Méthode Polaire (3)

- Représentation polaire d'un tenseur  $\mathbf{L}$  du type de l'élasticité

$$\begin{aligned}
 8T_0 &= L_{1111} - 2L_{1122} + 4L_{1212} + L_{2222}; \\
 8T_1 &= L_{1111} + 2L_{1122} + L_{2222}; \\
 8R_0 e^{4i\Phi_0} &= L_{1111} - 2L_{1122} - 4L_{1212} + L_{2222} + 4i(L_{1112} - L_{2212}); \\
 8R_1 e^{2i\Phi_1} &= L_{1111} - L_{2222} + 2i(L_{1112} + L_{2212}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{1111} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4\Phi_0 + 4R_1 \cos 2\Phi_1; \\
 L_{1112} &= R_0 \sin 4\Phi_0 + 2R_1 \sin 2\Phi_1; \\
 L_{1122} &= -T_0 + 2T_1 - R_0 \cos 4\Phi_0; \\
 L_{1212} &= T_0 - R_0 \cos 4\Phi_0; \\
 L_{2212} &= -R_0 \sin 4\Phi_0 + 2R_1 \sin 2\Phi_1; \\
 L_{2222} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4\Phi_0 - 4R_1 \cos 2\Phi_1.
 \end{aligned}$$





# *La Méthode Polaire (4)*

- Invariants polaires:
  - modules:  $T_0, T_1, R_0, R_1$
  - différence angulaire  $\Phi_0 - \Phi_1$
- Ces quantités sont caractéristiques d'un tenseur, et **donc d'un matériau donné**
- Variable liée au repère: un angle polaire
- Normalement, on pose  $\Phi_1 = 0$ , ce qui correspond à mettre l'axe forte d'orthotropie sur l'axe  $x_1$

# La Méthode Polaire (5)

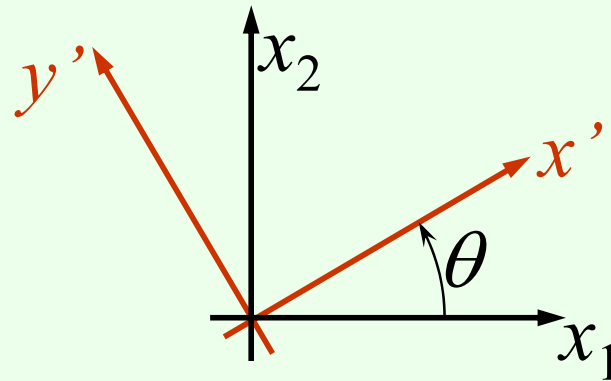
- **Caractérisation polaire des symétries élastiques:** chaque symétrie est déterminée par une particulière valeur des invariants

orthotropie :	$\Phi_0 - \Phi_1 = k \frac{\pi}{4}$
orthotropie $R_0$ :	$R_0 = 0$
symétrie du carré :	$R_1 = 0$
isotropie :	$R_0 = R_1 = 0$

- Il s'agit de la **première caractérisation invariante des symétries élastiques** dans le plan
- Pour chaque jeu de modules il existe **deux distinctes matériaux orthotropes**; on montre qu'ils correspondent aux matériaux appelés par Pedersen (1990) *low shear modulus* ( $k$  pair), et *high shear modulus* ( $k$  impair)

# La Méthode Polaire (6)

- Transformation par rotation de repère:



$$\begin{aligned}
 L_{xxxx} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) + 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta); \\
 L_{xxxy} &= R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta); \\
 L_{xxyy} &= -T_0 + 2T_1 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta); \\
 L_{xyxy} &= T_0 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta); \\
 L_{yyxy} &= -R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta); \\
 L_{yyyy} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) - 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta).
 \end{aligned}$$

# La Méthode Polaire (7)

## ■ Interprétation énergétique des constantes polaires

$$\sigma = \alpha(R, T, \Phi)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(r, t, \varphi)$$

$$W = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon = T t + R r \cos 2(\Phi - \varphi)$$

↓  
 $W_S$

↓  
 $W_D$

$$W_S = 4T_1 t^2 + 4R_1 r t \cos 2(\Phi_1 - \varphi)$$

$$W_D = 2T_0 r^2 + 2R_0 r^2 \cos 4(\Phi_0 - \varphi) + 4R_1 r t \cos 2(\Phi_1 - \varphi)$$

$$W > 0 \Leftrightarrow$$

$$T_0 > R_0$$

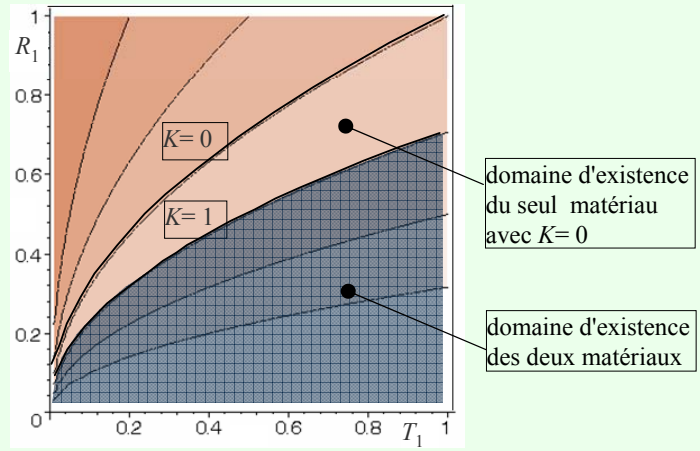
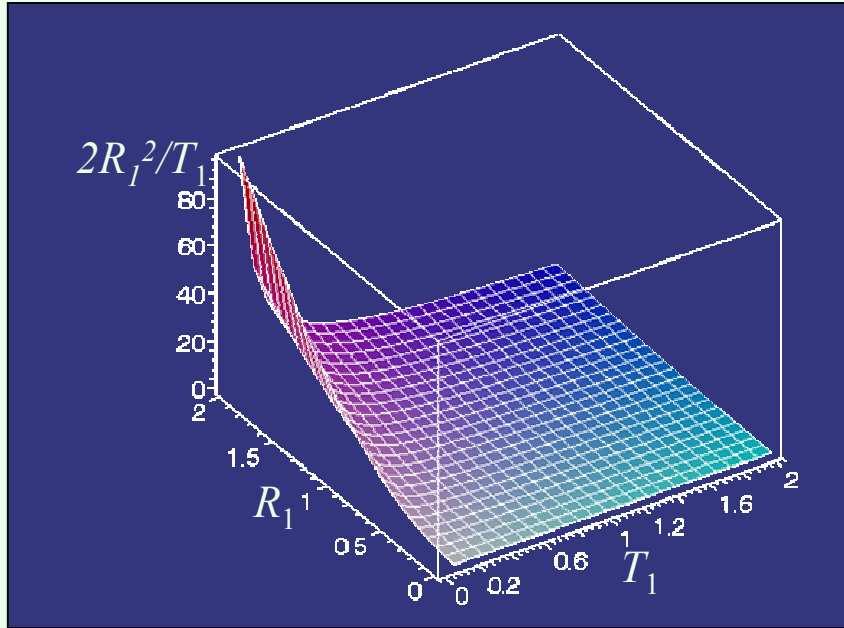
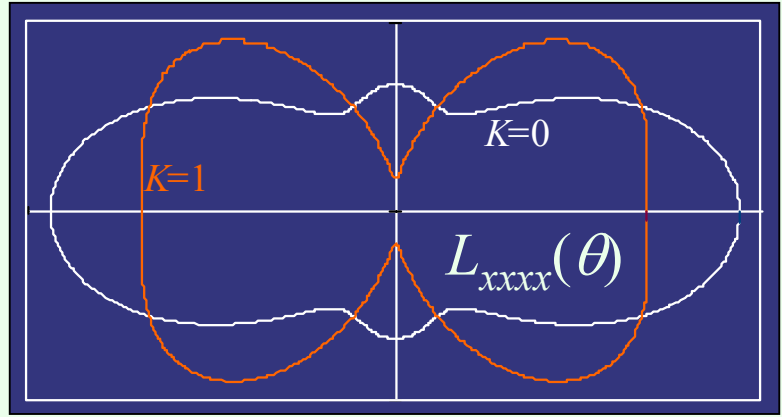
$$T_1 (T_0^2 - R_0^2) > 2R_1^2 [T_0 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \Phi_1)]$$

# La Méthode Polaire (8)

## Conditions polaires d'existence de l'orthotropie

$$T_0 > R_0$$

$$T_1 \left[ T_0 + (-1)^K R_0 \right] > 2R_1^2$$



# La Méthode Polaire (9)

- Inversion de la loi de comportement en polaire

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(t_0, t_1, r_0, r_1, \varphi_0, \varphi_1)$$

$$t_0 = 4 \frac{T_0 T_1 - R_1^2}{\Delta},$$

$$t_1 = \frac{T_0^2 - R_0^2}{\Delta},$$

$$r_0 e^{4i\varphi_0} = 4 \frac{R_1^2 e^{4i\varphi_1} - T_1 R_0 e^{4i\varphi_0}}{\Delta},$$

$$r_1 e^{2i\varphi_1} = -2 R_1 e^{2i\varphi_1} \frac{T_0 - R_0 e^{4i(\varphi_0 - \varphi_1)}}{\Delta},$$

$$\Phi_0 - \Phi_1 = K \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varphi_0 - \varphi_1 = k \frac{\pi}{4}$$

$$R_1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0$$

$$R_0 = 0 \not\Leftrightarrow r_0 = 0$$

$$R_0 = R_1 = 0 \Leftrightarrow r_0 = r_1 = 0$$

$$\Delta = 16 T_1 (T_0^2 - R_0^2) - 32 R_1^2 [T_0 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \Phi_1)]$$

# La Méthode Polaire (10)

## Paramètres de Tsai et Pagano et constantes polaires

$$\begin{aligned}
 L_{xxxx}(\theta) &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + 2U_6 \sin 2\theta + U_3 \cos 4\theta + U_7 \sin 4\theta \\
 L_{xxyy}(\theta) &= U_4 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta \\
 L_{xxxy}(\theta) &= 2U_6 \cos 2\theta - U_2 \sin 2\theta + 2U_7 \cos 4\theta - 2U_3 \sin 4\theta \\
 L_{yyyy}(\theta) &= U_1 - U_2 \cos 2\theta - 2U_6 \sin 2\theta + U_3 \cos 4\theta + U_7 \sin 4\theta \\
 L_{xyyy}(\theta) &= 2U_6 \cos 2\theta - U_2 \sin 2\theta - 2U_7 \cos 4\theta + 2U_3 \sin 4\theta \\
 L_{xyxy}(\theta) &= U_5 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_1 &= T_0 + 2T_1 \\
 U_2 &= 4R_1 \cos 2\Phi_1 \\
 U_3 &= R_0 \cos 4\Phi_0 \\
 U_4 &= -T_0 + 2T_1 \\
 U_5 &= T_0 \\
 U_6 &= 2R_1 \sin 2\Phi_1 \\
 U_7 &= R_0 \sin 4\Phi_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{orthotropie} \quad U_7 U_2^2 - 4U_7 U_6^2 - 4U_6 U_3 U_2 &= 0 \\
 \text{orthotropie } R_0 \quad U_3 = U_7 &= 0 \\
 \text{symétrie du carré} \quad U_2 = U_6 &= 0 \\
 \text{isotropie} \quad U_2 = U_3 = U_6 = U_7 &= 0
 \end{aligned}$$

# *La Méthode Polaire (11)*

- **La comparaison entre les deux méthodes montre que:**
  - les paramètres de Tsai et Pagano réellement invariants sont seulement  $U_1$ ,  $U_4$  et  $U_5$
  - les équations de transformation par rotation de repère basées sur les paramètres de Tsai et Pagano ne font pas apparaître des angles directement liés avec les directions d'orthotropie (comme c'est le cas dans la méthode polaire avec les angles polaires  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$ )
  - les quantités  $U_i$  n'ont pas de signification physique directe, ni en termes de symétries élastiques ni en termes énergétiques
  - la caractérisation de symétries élastiques est plus compliquée qu'avec la méthode polaire
- La méthode polaire semble donc être plus indiquée pour la formalisation de problèmes où les propriétés élastiques sont prises en compte

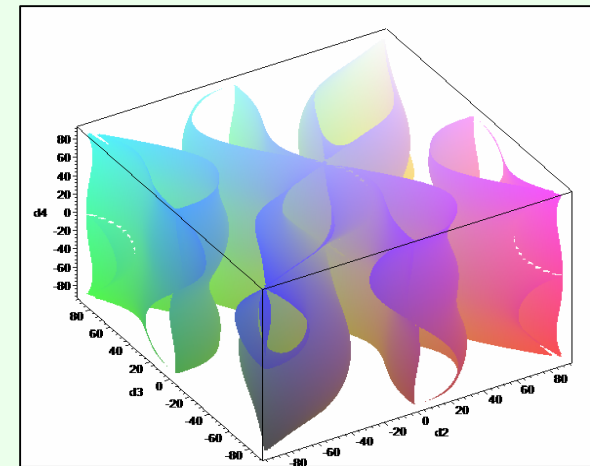
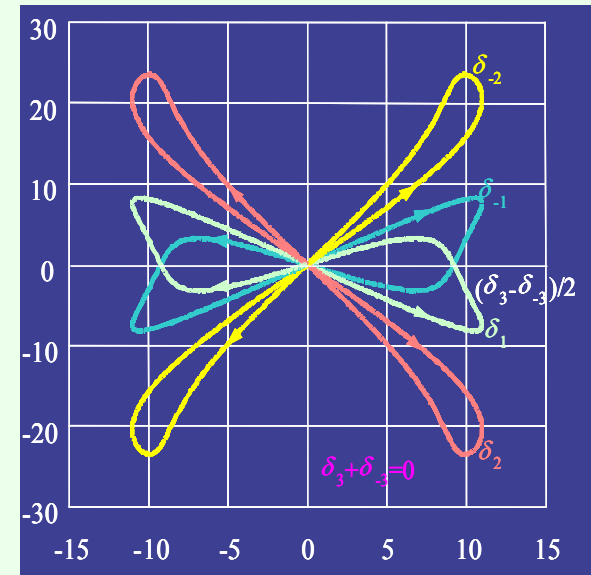


## *La Méthode Polaire (12)*

- La méthode polaire a été employée pour la solution d'un certain nombre de problèmes de conception et analyse des stratifiés: recherche de stratifiés non couplés, quasi-homogènes, orthotropes, isotropes etc.
- Deux ont été les axes principaux de recherche:
  - mise au point analytique de stratifiés particuliers utiles pour certains problèmes (séquences *quasi-triviales*)
  - élaboration d'une stratégie générale pour la prise en compte des symétries élastiques dans la conception optimale des stratifiés (*approche polaire-génétique*)

# La Méthode Polaire (13)

- D'autres résultats obtenus grâce à la méthode polaire sont:
  - mise au point d'une théorie générale pour les stratifiés avec plis à couplage intrinsèque (renforts en tissu)
  - découverte des matériaux  $R_0$ -orthotropes et totale invariance de cette propriété: un stratifié composé de plis  $R_0$ -orthotropes, même si différents et orientés au hasard, est toujours totalement orthotrope
  - élaboration d'une théorie générale pour l'analyse des effets des erreurs d'orientation sur les propriétés élastiques d'un stratifié
  - mise au point de techniques nouvelles pour des problèmes d'identification des propriétés élastiques
  - découverte de solutions analytiques particulières pour stratifiés à faible nombre de plis (orthotropie de flexion ou totale, quasi-homogénéité, isotropie etc.)



# Séquences quasi-triviales (1)

- L'ensemble des stratifiés non couplés ( $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ ) et quasi-homogènes ( $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{O}$ ) a un sous-ensemble q'on a appelé des **séquences quasi-triviales** (parce que leur recherche ne nécessite pas la solution directe des équations)
- L'existence de ces séquences est vite mise en évidence si l'on considère que

$$\mathbf{B}^* = \frac{2\mathbf{B}}{h^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-p}^p b_k \mathbf{Q}_k, \quad b_k = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 2p + 1 \\ 2k - k/|k|, b_0 = 0 & \text{si } n = 2p \end{cases}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^* - \mathbf{D}^* = \frac{1}{n^3} \sum_{k=-p}^p c_k \mathbf{Q}_k, \quad c_k = \begin{cases} 4(p^2 + p - 3k^2) & \text{si } n = 2p + 1 \\ 4(p^2 - 1 - 3k^2 + 3|k|), c_0 = 0 & \text{si } n = 2p \end{cases}$$

# Séquences quasi-triviales (2)

- Les coefficients  $b_k$  et  $c_k$  ont les propriétés suivantes
  - $b_k$  et  $c_k \in \mathbb{Z}$
  - les  $b_k$  varient linéairement avec  $k$ , alors que les  $c_k$  varient de façon quadratique
  - $\exists$  deux couches symétriquement placées par rapport au plan moyen, soient  $k^*$  et  $-k^*$ , telles que si  $-k^* \leq k \leq k^*$ ,  $c_k > 0$ , ailleurs  $c_k < 0$
  - on constate facilement que

$$\begin{aligned}
 b_{-k} &= -b_k \\
 \sum_{k=-p}^p b_k &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{-k} &= c_k \\
 \sum_{k=-p}^{-k^*-1} c_k + \sum_{k=k^*+1}^p c_k &= - \sum_{k=-k^*}^{k^*} c_k \\
 \sum_{k=-p}^p c_k &= 0
 \end{aligned}$$

# Séquences quasi-triviales (3)

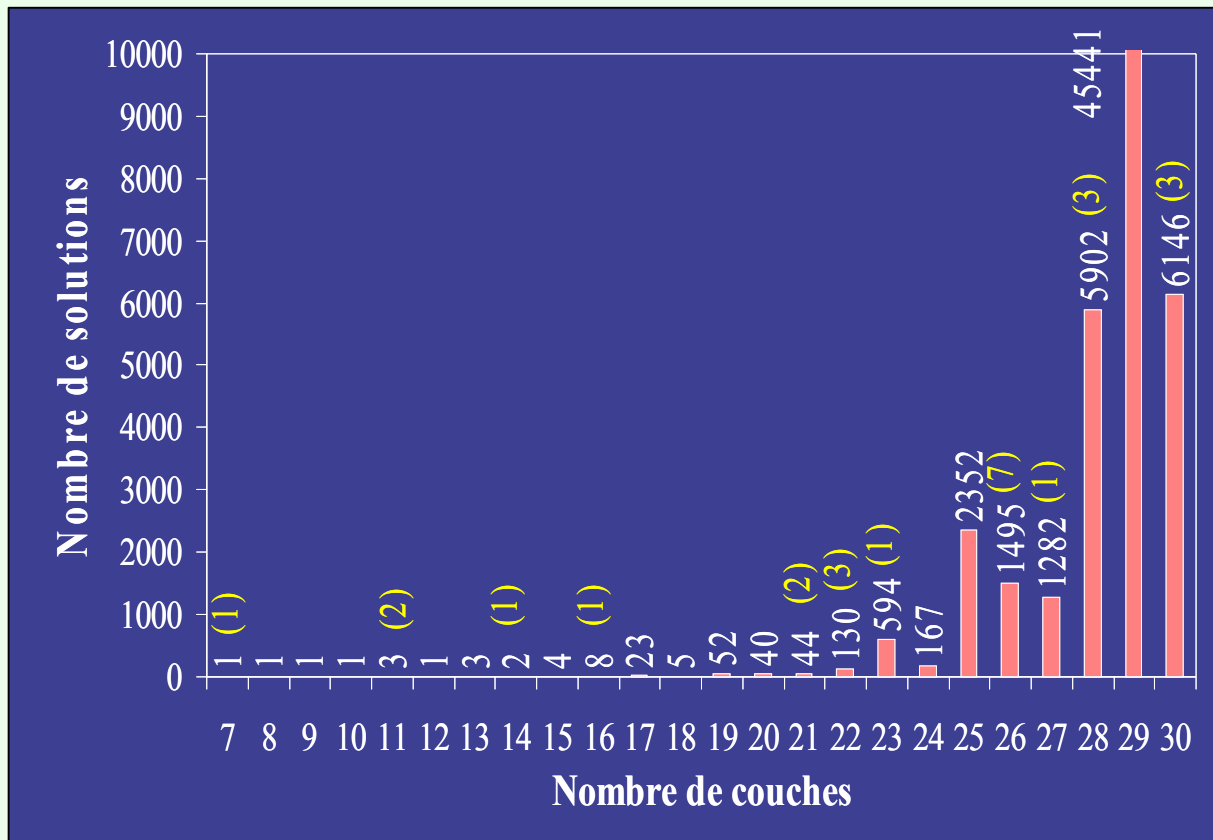
- Grâce à ces propriétés, une condition suffisante pour avoir un stratifié quasi-homogène (ou non couplé) est que la séquence d'empilement soit formée par des groupes de couches (*groupes saturés*), toutes avec la même orientation, ayant une somme nulle des coefficients  $b_k$  et  $c_k$  (pour  $\mathbf{B} = \mathbf{O}$  seulement des coefficients  $b_k$ )
- La recherche de ces stratifiés, qui minimisent la norme de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$ , se fait à l'aide d'un algorithme d'énumération, qui balaye toutes les possibilités et élimine les doublons et les solutions équivalentes

## Exemple d'une solution quasi-triviale pour un 18 couches

$k$	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
g.s.	0	1	2	0	1	2	2	2	1	1	0	0	1	0	0	2	2	1
$b_k$	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17
$c_k$	-136	-88	-46	-10	20	44	62	74	80	80	74	62	44	20	-10	-46	-88	-136

# Séquences quasi-triviales (4)

- Le nombre de séquences quasi-triviales augmente rapidement avec le nombre des couches



## *Séquences quasi-triviales (5)*

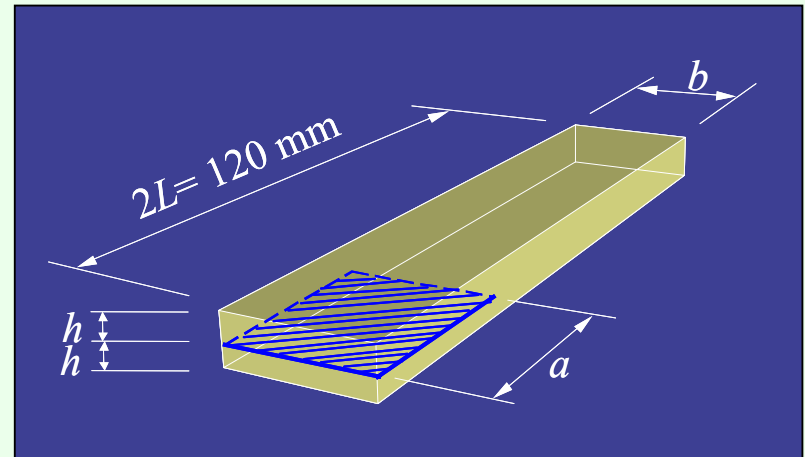
- Les solutions quasi-triviales sont exactes, car on travaille sur des quantités entières
- L'orientation de chaque groupe saturé est **libre** → les solutions quasi-triviales peuvent être utilisées dans des problèmes d'optimisation d'autres quantités, en assurant ainsi la propriété de découplage et/ou de quasi-homogénéité
- Les séquences symétriques sont un cas particulier de séquences quasi-triviales
- L'utilisation de séquences quasi-triviales de la quasi-homogénéité permet d'obtenir des propriétés de flexion en travaillant sur celles de membrane, ce qui est plus simple

# Séquences quasi-triviales (6)

■ Des applications des séquences quasi-triviales sont les suivantes

■ **Éprouvettes optimisées:** pour éliminer tous les effets parasites on cherchait une éprouvette fissurée avec les requis suivants:

- découplage de l'entier et des parties
- égal comportement de l'entier et des parties
- égal comportement en membrane et flexion
- absence des termes de couplage du type  $Q_{1112}$  et  $Q_{1222}$
- possibilité de varier l'angle d'orientation des couches sans altérer les autres propriétés



## Solutions retenues

16 couches:

$$[-\alpha/\alpha_2/-\alpha/\alpha/-\alpha_2/\alpha]_s$$

26 couches:

$$[0/\alpha/-\alpha/0_2/-\alpha/0/\alpha/0_2/\alpha/-\alpha/0]_s$$





# *Séquences quasi-triviales (7)*

## ■ Propriétés de ces séquences

- égal nombre de couches à  $\alpha$  et  $-\alpha \rightarrow \mathbf{A}$  orthotrope
  - séquences quasi-homogènes  $\rightarrow \mathbf{B}=\mathbf{O}$  et  $\mathbf{C}=\mathbf{O} \rightarrow \mathbf{D}$  orthotrope
  - solutions quasi-triviales  $\rightarrow \alpha$  peut varier
  - même rapport du nombre de couches dans les différentes directions pour l'entier et chaque partie  $\rightarrow$  égales propriétés de l'entier et des deux parties (même si celles-ci ne sont pas symétriques)
- 
- L'utilisation de ces séquences a permis une campagne d'essais sur la propagation de la fissure sur des éprouvettes sans effets parasites et avec angle  $\alpha$  variable



# *Séquences quasi-triviales (8)*

- **Isotropie totale**
- Observation: les solutions de la littérature utilisent des empilements qui limitent la possibilité de trouver des solutions exactes (Fukunaga, 1990, Wu et Avery, 1992, Paradies, 1992)
- Stratégie: utiliser la règle de Werren et Norris sur séquences quasi-triviales de type quasi-homogène
- Le calcul est fait sur les propriétés de membrane, plus faciles à traiter
- La quasi-homogénéité entraîne automatiquement les mêmes propriétés en flexion et le découplage

# Séquences quasi-triviales (9)

## ■ Solutions exactes totalement isotropes

N. de plis	Orientations	Séquence d'empilement
18 (5 sol.)	0= -60° 1= 0° 2= 60°	0 1 2 0 1 2 2 2 1 1 0 0 1 0 0 2 2 1 0 1 2 2 0 1 1 2 0 1 2 0 2 0 1 0 1 2 0 1 2 2 0 1 1 2 0 2 1 0 1 0 2 0 2 1 0 1 2 2 1 0 2 0 1 1 0 2 1 2 0 0 2 1 0 1 1 2 2 2 0 0 2 1 0 0 1 1 1 2 2 0
24 (1 sol.)	0= -45° 1= 0° 2= 45° 3= 90°	0 1 2 3 2 3 1 3 0 2 0 1 0 1 3 1 2 0 2 3 2 3 0 1
27 (219 sol.)	0= -60° 1= 0° 2= 60°	0 0 1 2 1 2 1 2 2 2 1 1 0 0 0 0 0 1 2 2 0 1 1 2 1 2 0 0 0 1 2 2 1 2 1 1 2 2 1 0 0 0 0 0 1 2 1 0 2 2 1 2 1 0 0 1 0 1 2 2 0 2 1 2 2 1 2 1 0 1 0 0 1 0 2 0 0 1 2 1 2 0 1 0 1 2 2 2 0 1 2 2 1 0 1 2 1 0 0 1 2 0 0 0 1 2 1 2 0 1 0 2 2 2 1 0 1 2 1 1 0 1 2 2 0 0 1 2 0 0 0 2 1 2 1
30 (29 sol.)	0= 0° 1= 72° 2= 144° 3= 216° 4= 288°	0 1 2 3 3 0 4 4 1 2 4 4 2 2 3 1 1 3 1 0 0 0 0 2 3 3 4 4 2 1 0 1 2 3 4 3 0 2 1 4 4 2 4 1 3 1 3 0 2 0 0 3 2 4 1 0 1 2 3 4 0 1 2 3 4 4 0 2 1 3 3 4 2 1 3 1 2 0 4 0 0 4 3 2 1 0 1 2 4 3 0 1 2 3 4 3 0 2 1 4 4 2 4 3 1 1 3 0 2 0 0 1 2 4 3 0 3 2 1 4 0 1 2 3 4 4 1 0 3 2 2 4 3 3 0 2 1 1 4 0 1 4 3 0 0 2 2 1 4 3 0 1 2 3 4 3 4 0 1 2 2 4 1 3 0 2 4 1 3 0 3 4 1 0 0 2 2 1 3 4 0 1 2 3 4 4 3 0 1 2 2 4 1 3 0 2 3 1 4 0 3 4 1 0 0 2 2 1 4 3 0 1 2 3 4 4 2 0 3 1 3 1 4 2 0 4 3 2 1 0 1 3 2 0 0 4 4 2 1 3 0 1 2 3 4 4 2 0 3 3 1 4 1 2 0 1 3 2 4 0 1 4 2 0 0 3 3 2 4 1 0 1 2 3 3 4 4 0 1 2 2 4 1 4 0 3 3 1 2 2 0 0 1 3 4 0 3 1 4 2



# *Séquences quasi-triviales (10)*

- **Orthotropie totale**
- On sait que (voir le livre de Jones, p. ex.) une séquence antisymétrique donne l'orthotropie de flexion
- Malheureusement, dans ce cas on n'a pas, normalement, l'orthotropie de membrane et le découplage
- La stratégie est alors celle de chercher des empilement antisymétriques dans les séquences quasi-triviales de type quasi-homogène
- Les stratifiés étant quasi-homogènes, l'orthotropie de **D** entraîne celle de **A** (avec mêmes axes et mêmes modules élastiques) et le découplage est aussi garanti
- L'orientation des groupes saturés étant libre, on obtient des stratifiés orthotropes dont les angles des plis peuvent être calculés pour optimiser d'autres propriétés (résistance et/ou rigidité dans une direction etc.)

# Séquences quasi-triviales (11)

- Quelques solutions  
totalement orthotropes  
et découplés

7 plis	$\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	0	$\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$				
8 plis	$\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$			
9 plis	$\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	0	$-\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$		
	$\alpha$	$-\alpha$	0	$-\alpha$	0	$\alpha$	0	$\alpha$	$-\alpha$		
10 plis	0	$\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	0	$\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	0		
	$\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	0	0	$-\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	
	$\alpha$	$-\alpha$	0	$-\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	0	$\alpha$	$-\alpha$	
	$\alpha$	0	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	0	$-\alpha$	
11 plis	0	$\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	0	
	0	$\alpha$	$-\alpha$	0	$-\alpha$	0	$\alpha$	0	$\alpha$	$-\alpha$	0
	0	0	$\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	0	$\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	0	0
	$\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	0	0	0	$-\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$
	$\alpha$	$-\alpha$	0	$-\alpha$	$\alpha$	0	$-\alpha$	$\alpha$	0	$\alpha$	$-\alpha$
	$\alpha$	$-\alpha$	0	0	$-\alpha$	0	$\alpha$	0	0	$\alpha$	$-\alpha$
	$\alpha$	0	$-\alpha$	$-\alpha$	0	0	0	$-\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$
	$\alpha$	0	$-\alpha$	$-\alpha$	0	$\alpha$	$-\alpha$	0	$\alpha$	$\alpha$	0
12 plis	$\alpha$	0	$-\alpha$	0	$-\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	0	$\alpha$	$-\alpha$
	0	$\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	0	0	$-\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	0
	0	$\alpha$	$-\alpha$	0	$-\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	0	$\alpha$	$-\alpha$
	0	$\alpha$	0	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	0	$-\alpha$
	0	0	$\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	0
	$\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$
	$\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	0	0	0	0	$-\alpha$	$\alpha$	$\alpha$
	$\alpha$	$-\alpha$	0	$-\alpha$	$\alpha$	0	0	$-\alpha$	$\alpha$	0	$\alpha$
	$\alpha$	$-\alpha$	0	0	$-\alpha$	$\alpha$	$-\alpha$	$\alpha$	0	0	$\alpha$
	$\alpha$	0	$-\alpha$	$-\alpha$	0	$\alpha$	$-\alpha$	0	$\alpha$	$\alpha$	0

# *L'approche polaire-génétique (1)*

- Dans le but d'aborder de façon générale et efficace la conception optimale de stratifiés, une nouvelle approche était nécessaire
- L'objectif de cette nouvelle approche était principalement la prise en compte des propriétés élastiques dans le processus de conception
- Pour cela, les points essentiels de la nouvelle approche sont:
  - **généralité totale**: refus de toute hypothèse susceptible de donner automatiquement certaines propriétés
  - conception comme **problème d'optimum**
  - **représentation polaire** des tenseurs de l'élasticité
  - **unification du plus grand nombre de problèmes** dans une forme unique et si possible typique de l'optimisation structurale
  - mise au point d'un **algorithme numérique souple et robuste** pour la recherche des solutions

## *L'approche polaire-génétique (2)*

- **Première phase:** formulation unifié des problèmes concernant les propriétés élastiques
- **Objectifs:**
  - réunir en une seule formulation tous les problèmes de conception des stratifiés par rapport aux symétries élastiques
  - transformer ces problèmes en un problème d'optimum
- Construction d'une fonction objectif:

$$I(P_k) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{H} \mathbf{P} = H_{ij} P_i P_j, \quad i, j = 1, \dots, 18; \quad \mathbf{H}^T = \mathbf{H}$$

- $I(P_k)$  est une forme quadratique semi-définie positive de la matrice symétrique  $\mathbf{H}$
- Les solutions sont les minima de  $I(P_k)$ , qui valent zéro

# L'approche polaire-génétique (3)

- Le choix de la matrice  $\mathbf{H}$  détermine le type de problème
- Les paramètres  $P_k$  sont les 18 paramètres polaires des tenseurs  $\mathbf{A}^*$ ,  $\mathbf{B}^*$  et  $\mathbf{D}^*$ , rendus non dimensionnels par le biais d'un module  $M$

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{T_0^{\mathbf{A}}}{h M}, & P_2 &= \frac{T_1^{\mathbf{A}}}{h M}, & P_3 &= \frac{R_0^{\mathbf{A}}}{h M}, & P_4 &= \frac{R_1^{\mathbf{A}}}{h M}, & P_5 &= \Phi_0^{\mathbf{A}}, & P_6 &= \Phi_1^{\mathbf{A}}, \\
 P_7 &= \frac{2 T_0^{\mathbf{B}}}{h^2 M}, & P_8 &= \frac{2 T_1^{\mathbf{B}}}{h^2 M}, & P_9 &= \frac{2 R_0^{\mathbf{B}}}{h^2 M}, & P_{10} &= \frac{2 R_1^{\mathbf{B}}}{h^2 M}, & P_{11} &= \Phi_0^{\mathbf{B}}, & P_{12} &= \Phi_1^{\mathbf{B}}, \\
 P_{13} &= \frac{12 T_0^{\mathbf{D}}}{h^3 M}, & P_{14} &= \frac{12 T_1^{\mathbf{D}}}{h^3 M}, & P_{15} &= \frac{12 R_0^{\mathbf{D}}}{h^3 M}, & P_{16} &= \frac{12 R_1^{\mathbf{D}}}{h^3 M}, & P_{17} &= \Phi_0^{\mathbf{D}}, & P_{18} &= \Phi_1^{\mathbf{D}}.
 \end{aligned}$$



## *L'approche polaire-génétique (4)*

- Les lois de composition de la théorie classique des stratifiés sont valables pour les composantes polaires aussi
- Ex: les paramètres  $P_k$  de la flexion

$$P_{13} = \frac{12}{M h^3} \sum_{k=1}^n T_{0k} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

$$P_{14} = \frac{12}{M h^3} \sum_{k=1}^n T_{1k} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

$$P_{15} e^{4iP_{17}} = \frac{12}{M h^3} \sum_{k=1}^n R_{0k} e^{4i(\Phi_{0k} + \delta_k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

$$P_{16} e^{2iP_{18}} = \frac{12}{M h^3} \sum_{k=1}^n R_{1k} e^{2i(\Phi_{1k} + \delta_k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

# L'approche polaire-génétique (5)

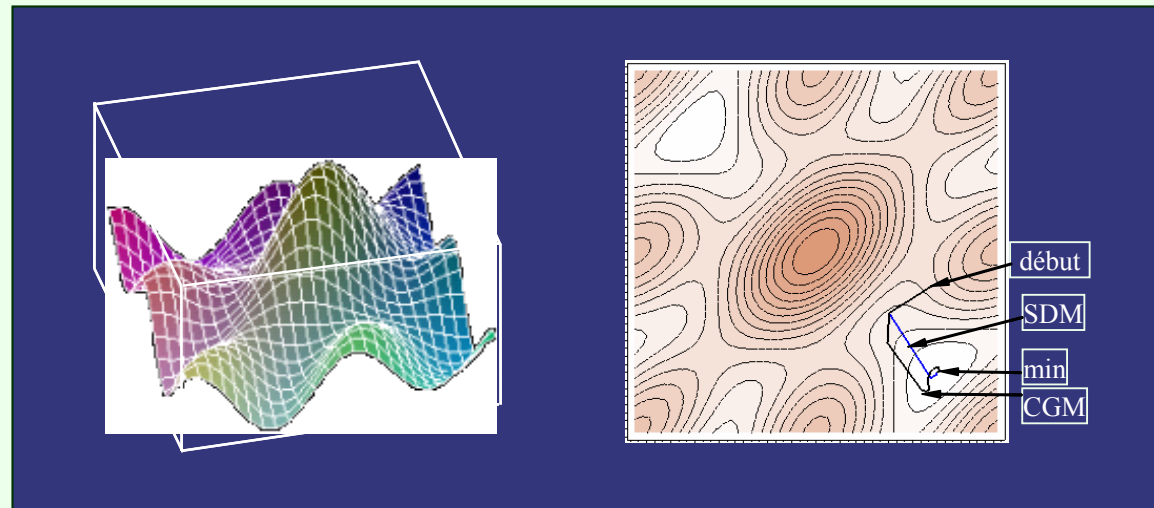
- **Avantages de cette approche**
- Unification de tous les problèmes de conception des stratifiés par rapport aux symétries
- Forme typique d'un problème d'optimum structural
- Valeur de la fonction objectif connue *a priori* en correspondance de la solution
- Approche totalement générale: il est, en principe, possible d'atteindre la totalité des solutions
- Simplifications en terme de programmation
- Caractérisation de minimum d'un certain nombre de propriétés élastiques



# L'approche polaire-génétique (7)

- Fonction objectif **fortement non-linéaire** avec **plusieurs minima**, souvent **non isolés** (pb. non-convexe dans les orientations)
- Multiples inconnues et de **type différent** (continues, discrètes, groupées)
- **Aucune indication préalable** dans l'exploration du domaine des variables

*Ex: 18 couches isotrope  
de type quasi-trivial.*



- **Choix fait: algorithmes génétiques**



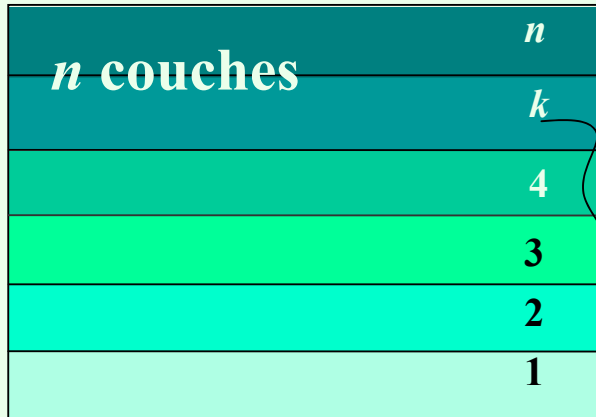
# *Le code BIANCA*

- **Idée:** créer un instrument versatile pour la conception optimale des stratifiés en composite
- **Base de travail:** l'approche polaire unifiée
- **Objectif:** aller vers la conception optimale complètement automatisée des stratifiés
  
- **BIANCA: BI**o **AN**alyse  
de **C**omposites **A**ssemblés

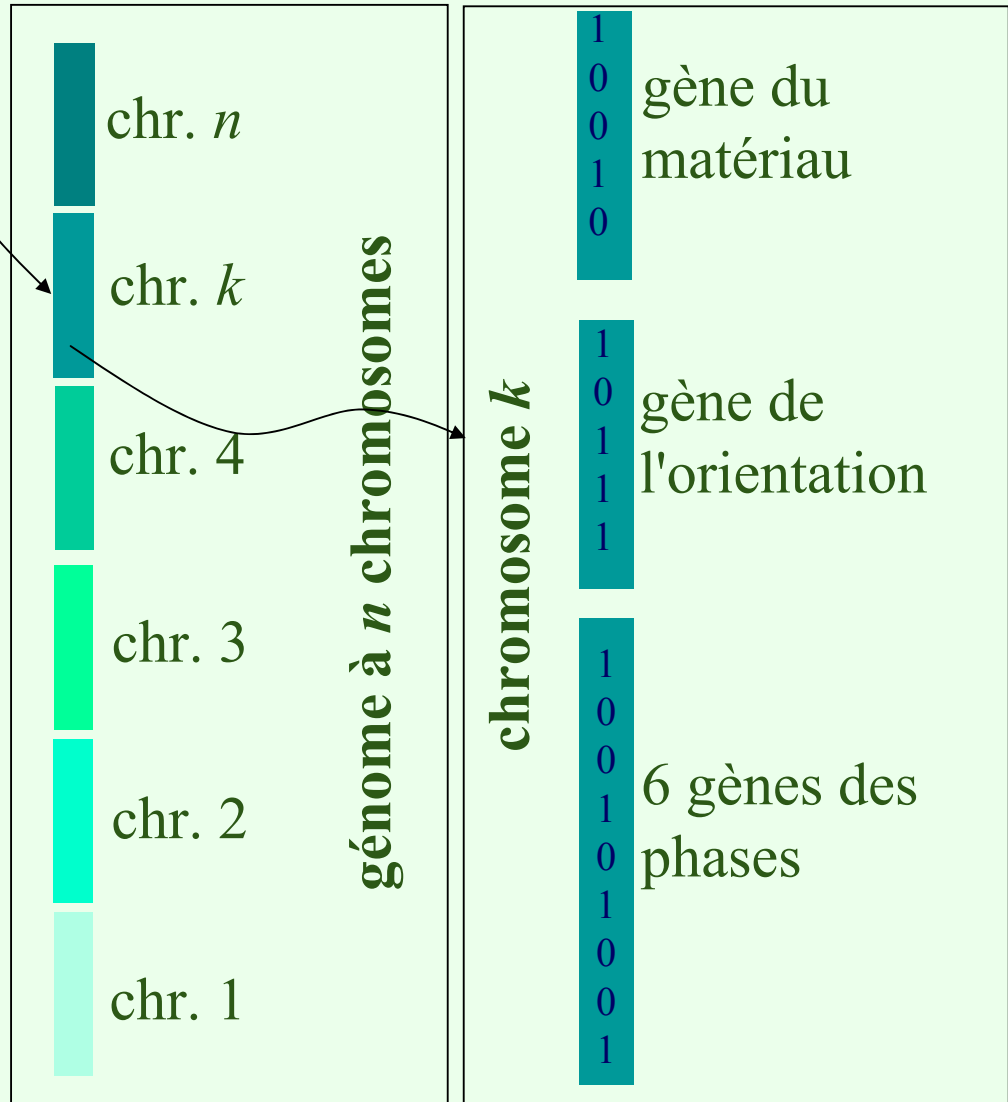
# Caractéristiques de l'algorithme BIANCA

- Algorithme haploïde standard (taille de la population fixée, sélection par roue de loterie biaisée, *cross-over* et mutation)
- Codage binaire
- Possibilité d'élitisme, même multiple
- Prise en compte de certaines contraintes par une nouvelle méthode
- Génome du stratifié repartit sur plusieurs chromosomes
- *Cross-over* sur chaque chromosome (amélioration de l'échange génétique)
- Nombre de couches  $n$  fixé *a priori*
- Opération génétiques faites à l'aide d'opérateurs logiques (algèbre booléenne)

# Le génome d'un stratifié dans BIANCA



- Un stratifié à  $n$  couches a un génome à  $n$  chromosomes et  $6n$  gènes haploïdes.
- Le type de problème détermine les gènes actifs.



# Traitement des paramètres

Variables de conception

$n$	Orientations	Couches							
non	toujours	non	oui						
fixé <i>a priori</i> (pour l'instant)	continue en $]-90^\circ, 90^\circ]$	non définies	identiques et appartenant à une base de données						
	continue en $[\alpha, \beta]$	non définies mais avec invariant polaire spécifiés	variables à chaque couche et appartenant à une base de données						
	discrète avec pas $p$ en $[\alpha, \beta]$	définies, même séparément, dans une base de données	à concevoir, même séparément, à travers:						
	$[\alpha_1, \dots, \alpha_q]$		<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td><math>M_f</math></td> <td><math>M_m</math></td> <td><math>t</math></td> <td><math>v</math></td> <td><math>k</math></td> <td><math>\beta</math></td> </tr> </table>	$M_f$	$M_m$	$t$	$v$	$k$	$\beta$
$M_f$	$M_m$	$t$	$v$	$k$	$\beta$				

Variables
continues
discrètes
groupées



# Pointeurs aux variables

- Le passage à un **système de pointeurs aux variables** est obligatoire pour traiter tous ces types de variables de la même façon
- Chaque variable discrétisée est représentée par un vecteur de pointeurs → **manipulation de quantités totalement abstraites**
- Ce sont les pointeurs à être codés en binaire
- Pb: si pour une variable représentée par un vecteur de  $\mu$  pointeurs avec chaînes binaires de  $\lambda$  bits il est

$$\mu < 2^\lambda$$

le *cross-over* et la mutation peuvent donner lieu à des binaires sans pointeurs correspondants

# Représentation cyclique des pointeurs

- Stratégie adoptée: **représentation cyclique** des pointeurs (pour minimiser le nombre de pointeurs non existants) et *death penalty*: le pointeur non existant est remplacé par le parent avec la meilleure *fitness*
- C'est une technique inspirée par le codage des aminoacides: 1 aminoacide est codé par une chaîne de 3 bases azotées: (nucléotides A, C, G, T)  $\rightarrow$  64 codes possibles pour 20 aminoacides différents  $\rightarrow$  plusieurs triplets codent le même aminoacide, mais 3 triplets ne codent rien

# Exemple

- $\mu = 5 \rightarrow$  pointeurs: 0, 1, 2, 3, 4  
 $\lambda_{\min} = 3 \rightarrow$  000, 001, 010, 011, 100
- *Cross-over* des pointeurs 4 e 3

$$4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

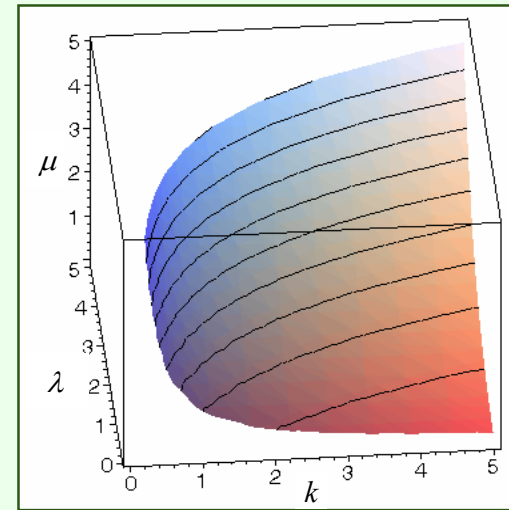


$$3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$= 7 \rightarrow$  3 pointeurs  
non existant sur 8  
 $= 0$

- Si alors  $\lambda = 4$  et  $k = 3 \rightarrow 2^{\lambda} - k\mu = 2 \rightarrow$  2 seuls pointeurs non existant sur 16.
- Chaque pointeur est représenté  $k$  fois  $\rightarrow$  **la distribution de la probabilité de sélection n'est pas altérée.**



$$\lambda \text{ et } k: 2^{\lambda} - k\mu = \min$$

# Calcul de la fitness

- Pour chaque stratifié-individu  $j$  BIANCA calcule la quantité

$$a_j = g_{max} + g_{min} - g_j$$

La *fitness* de l'individu  $j$  à la génération en cours est donc calculée comme

$$f_j = \frac{a_j}{\sum_{j=1}^N a_j}$$

- $g_{max}$  et  $g_{min}$  sont les valeurs max et min, sur la génération, de la fonction objectif  $g$ , alors que  $g_j$  est celle de l'individu  $j$ .
- Avec ce choix *fitness* et probabilité de sélection coïncident car

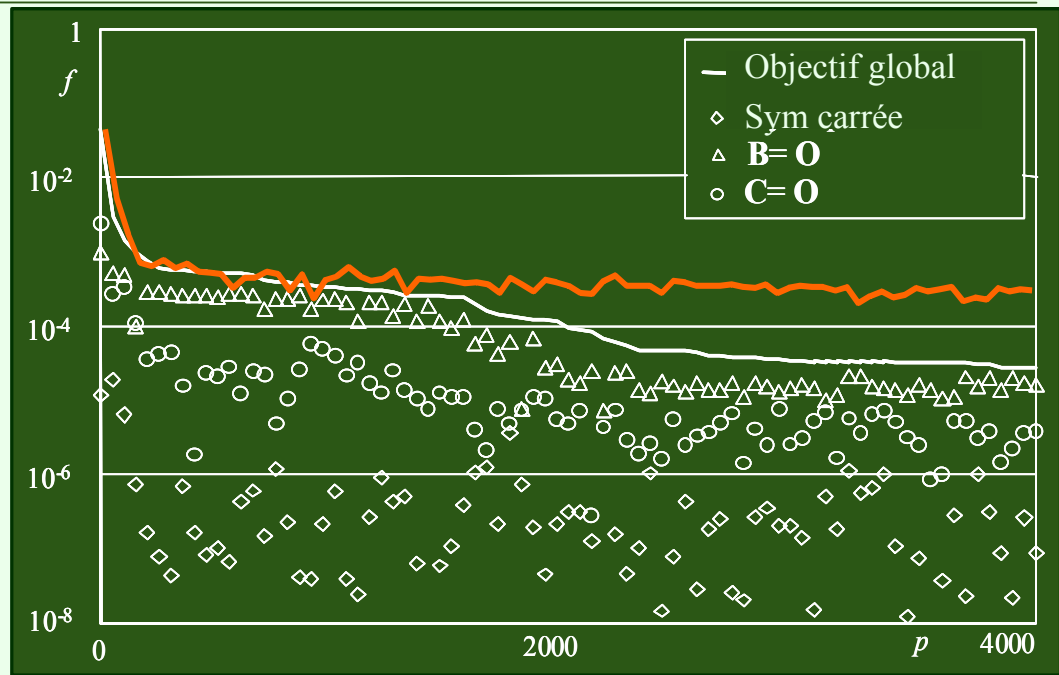
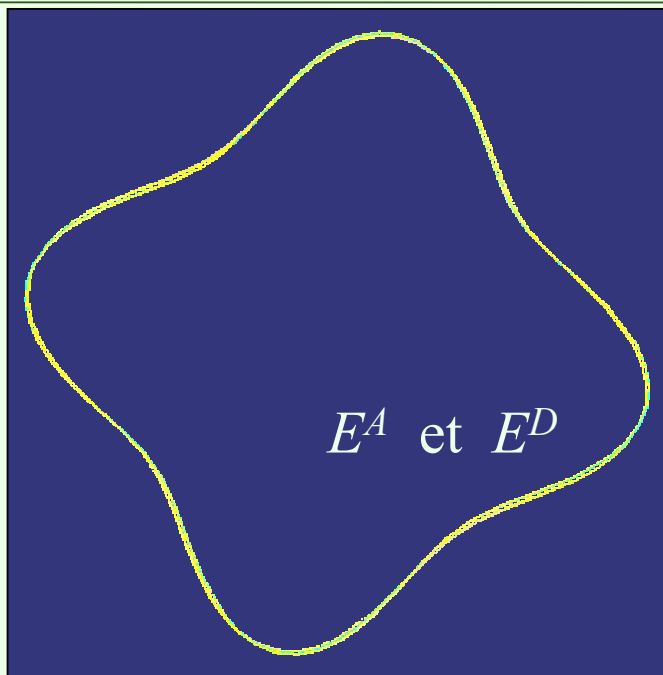
$$0 \leq f \leq 1$$

# Quelques résultats numériques

Numéro du problème	Type de problème	Type de couche	Ensemble de définition des orientations	$n$	$N$	$p$	$t$	$f$	Solution (°)
1 23	Découplage	$R_1=0$	$]-45^\circ, 45^\circ]$	5	200	200	7	0	[4.5735/0/0/1.5364/6.1092]
2 28	Orthotropie $K=0$ pour <b>A</b> et <b>D</b> , avec axes coïncidents et découplage	quelconque	$]-90^\circ, 90^\circ]$	10	200	500	5	$2.53 \times 10^{-5}$	[0/-17.16/-2.69/5.05/-14.60/-5.97/-14.45/5.34/1.65/-12.95]
3 28	Orthotropie $K=1$ pour <b>A</b> et $K=0$ pour <b>D</b> , avec axes coïncidents et découplage	quelconque	$]-90^\circ, 90^\circ]$	12	200	500	5	$4.74 \times 10^{-5}$	[0/44.67/15.70/-39.98/-25.46/-37.21/59.04/54.28/36.92/-38.16/18.58/-5.23]
4 28	Orthotropie $K=1$ pour <b>A</b> et $K=0$ pour <b>D</b> , avec axes coïncidents et découplage	quelconque	$]-90^\circ, 90^\circ]$ , $p_{angle}=10^\circ$	12	200	300	3	$5.08 \times 10^{-4}$	[0/10/40/-40/-20/50/-20/30/-40/30/10/-10]
5 13+14+27	Isotropie de <b>A</b> , orthotropie $K=0$ pour <b>D</b> , découplage	quelconque	$]-90^\circ, 90^\circ]$	12	200	500	7	$9.40 \times 10^{-6}$	[0/75.99/-31.45/-67.48/37.97/31.97/-38.49/-76.87/57.69/89.31/14.15/-23.88]
6 13+14+27	Isotropie de <b>A</b> , orthotropie $K=0$ pour <b>D</b> , découplage	quelconque	$]-90^\circ, 90^\circ]$ , $p_{angle}=10^\circ$	12	200	500	7	$1.13 \times 10^{-4}$	[0/60/70/10/-60/-50/-60/-50/60/0/10/70]
7 24	quasi-homogénéité avec symétrie carrée	quelconque	$]-90^\circ, 90^\circ]$	12	1000	4000	70	$2.27 \times 10^{-5}$	[0/62.46/-53.44/81.56/-15.80/-75.75/66.59/0/-0.54/46.07/-28.12/-88.94]
8 18	isotropie totale	quelconque	$]-90^\circ, 90^\circ]$	12	2000	3000	100	$3.46 \times 10^{-4}$	[0/51.58/-51.49/85.83/-51.34/85.04/24.09/-19.08/30.94/-11.16/63.28/-65.21]

# Un ex: 12 couches q-h à sym carrée

Solution	Séquence des orientations (°)	$f$
BIANCA	[0/62.46/-53.44/81.56/-15.80/-75.75/66.59/0/-0.54/46.07/-28.12/-88.94]	$2.27 \times 10^5$
BIANCA approximée	[0/62/-53/82/-16/-76/67/0/-1/46/-28/-89]	$7.84 \times 10^5$
Gradient	[0/61.7640/-52.1221/82.6706/18.2096/-78.3146/ 64.6143/1.0953/-2.5155/44.6293/29.8974/-89.6532]	$1.09 \times 10^{13}$
Gradient approximée	[0/62/-52/83/-18/-78/65/1/-2 /45/-30/90]	$8.56 \times 10^5$



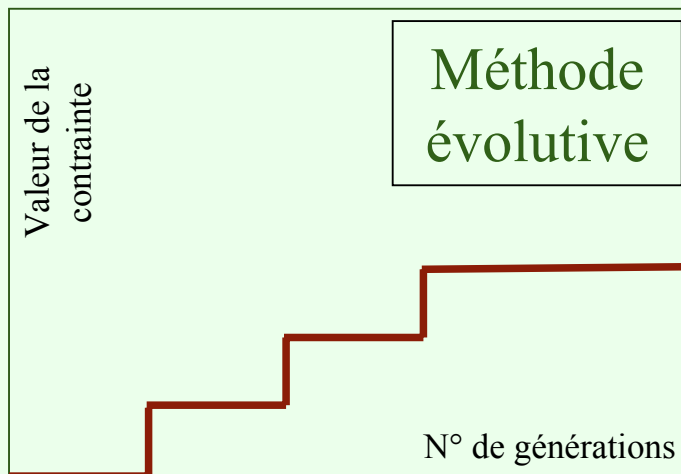
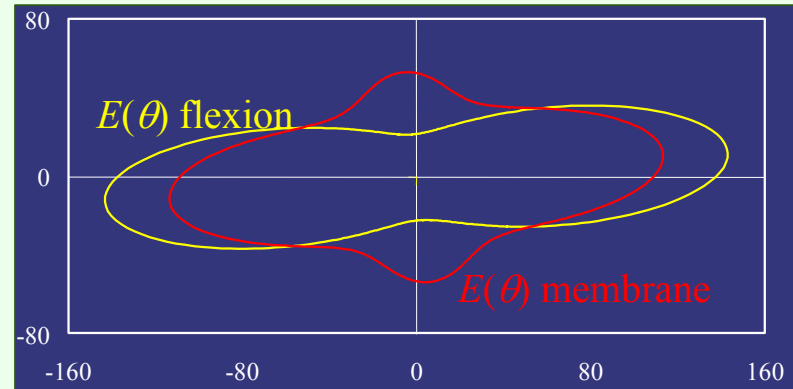
# Optimisation avec contraintes

- **Ex:** 12 couches en carbone-époxyde T300/5208, **B=O**, **A**= orthotrope,  $\delta_k$  discrétisés à  $15^\circ$

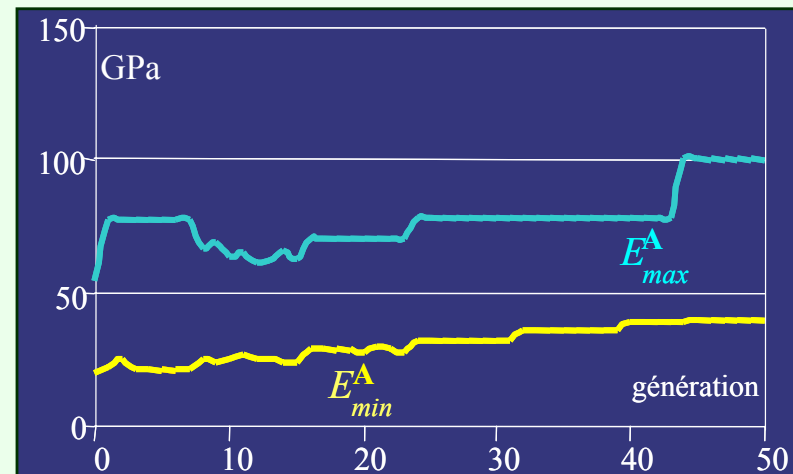
$$E_{max}^A \geq 100 \text{ GPa} (= 0.55 E_1)$$

$$E_{min}^A \geq 40 \text{ GPa} (= 3.88 E_2)$$

$[0^\circ/30^\circ/-15^\circ/15^\circ/90^\circ/-75^\circ/$   
 $0^\circ/45^\circ/-75^\circ/0^\circ/-15^\circ/15^\circ]$



Méthode  
évolutive



# Considérations finales

- L'approche polaire-génétique est une voie d'attaque nouvelle et originale aux problèmes de conception des stratifiés, se caractérisant par:
  - généralité (recherche du *vrai optimum*)
  - formalisation polaire unifiée (prise en compte des propriétés élastiques *fondamentales* directement dans les problèmes d'optimum)
  - un algorithme génétique qui vise au traitement de la complexité et à la gestion de l'information *diffuse*
- Beaucoup de problèmes sont encore à traiter: optimisation de la rigidité, du poids, de la résistance, des charges critiques et des fréquences de vibrations, pour ne rester que dans un contexte classique d'optimisation structurale



# *Bibliographie*



# *Livres sur les composites*

1. Jones R. M., **1975**: *Mechanics of composite materials*. Mc Graw-Hill.
2. Tsai S. W., Hahn H. T., **1980**: *Introduction to Composite Materials*. Technomic.
3. Tsai, S. W., **1985**: *Composite design guide*. Technomic.
4. Pedersen P., **1997**: *Elasticity, anisotropy, laminates*. Cours d'élasticité orienté aux stratifié, sur le site web [www.fam.dtu.dk/html/pp.html](http://www.fam.dtu.dk/html/pp.html)
5. Gay D., **1997**: *Matériaux composites*. Hermès.
6. Berthelot J.M., **1999**: *Matériaux composites. Comportement mécanique et analyse des structures*. Ed. Technique et documentation
7. Barbero E. J., **1998**: *Introduction to composite materials design*. Taylor and Francis.
8. Gürdal Z., Haftka R. T. & Hajela P., **1999**: *Design and optimization of laminated composite materials*. J. Wiley & Sons.

# Articles sur les composites (1)

1. Abrate S., **1994**: Optimal design of laminated plates and shells. *Composite Structures*, v.29, 269-286.
2. Abrate S., **1995**: Design of multispan composite plates to maximize the natural frequency. *Composites*, v.26, 691-697.
3. Abrate S., **1996**: Maximizing the fundamental natural frequency of triangular composite plates. *J. Vibr. Acoust.*, v.118, 141-146.
4. Barakat S. A., Abu-Farsakh G. A., **1999**: The use of an energy-based criterion to determine optimum configurations of fibrous composites. *Compos. Sci. Techn.*, 1891-1899.
5. Caprino C., Crivelli-Visconti I., **1982**: A note on specially orthotropic laminates. *J. Composite Mat.*, v.16, 395-399.
6. Cheng G., Pedersen P., **1997**: On sufficiency conditions for optimal design based on extremum principles of mechanics. *J. Mech. Phys. Solids*, v.45, 135-150.
7. Cinquini C., Mariani C. & Venini P., **1997**: Optimal robust design of novel materials: problems of stability and vibrations. *Eng. Opt.*, v.29, 323-345.
8. Duvaut G., Terrel G., Léné F. & Verijenko V. E., **2000**: Optimization of fiber reinforced composites. *Composite Structures*, v.48, 83-89.
9. Duvaut G., Verijenko V. E., **2001**: A new elasticity problem and its application to the optimal wrapping. *Composite Structures*, v.54, 149-152.
10. Foldager J., Hansen J. S., Olhoff N., **1998**: A general approach forcing convexity of ply angle optimization in composite laminates. *Structural Optimization*, v.16, 201-211.
11. Fukunaga H., **1990**: On isotropic laminate configurations. *J. Composite Mat.*, v.24, 519-535.
12. Fukunaga H., Vanderplaats G. N., **1991**: Stiffness optimization of orthotropic laminated composites using lamination parameters. *AIAA Journal*, v.29, 641-646.
13. Fukunaga H., Vanderplaats G. N., **1991**: Strength optimization of laminated composites with respect to layer thickness and/or layer orientation angle. *Comput. Struct.*, v.40, 1429-1439.
14. Gong X. J., Vannucci P. & Verchery G., **2001**: Effect of adjacent layer fiber orientation on the resistance of laminates to delamination fracture. *Proc. of ICCM 13 (Thirteenth International Conference on Composite Materials)*, papier 1293. Pékin, Chine, 25-29 juin 2001.
15. Graesser D. L., Zabinsky Z. B., Tuttle M. E. & Kim G. I., **1991**: Designing laminated composites using random search techniques. *Composite Structures*, v.18, 311-325.
16. Grédiac M., **1999**: A procedure for designing laminated plates with required stiffness properties. Application to thin quasi-isotropic quasi-homogeneous uncoupled laminates. *J. Composite Mat.*, v.33, 1939-1956.
17. Grédiac M., **2000**: On the design of some particular orthotropic plates with non-standard ply orientations. *J. Composite Mat.*, v.34, 1665-1699.
18. Grédiac M., Toussaint E., **2000**: Conception de stratifiés présentant des coefficients de dilatation thermique donnés: méthodologie et exemples avec faible nombre de plis. *Comptes rendus du Congrès JNC 12 (12èmes Journées Nationales sur les Composites)*, 121-130. Cachan, France, 15-17 novembre 2000.
19. Grédiac M., **2001**: On the stiffness design of thin woven composites. *Composite Structures*, v.51, 245-255.
20. Hajela P., Shih C.-J., **1989**: Optimal design of laminated composites using a modified integer and discrete programming algorithm. *Comput. Struct.*, v.32, 213-221.

# Articles sur les composites (2)

21. Hammer V. B., Bendsøe M. P., Lipton R. & Pedersen P., **1997**: Parametrization on laminate design for optimal compliance. *Int. J. Solids Str.*, v.34, 415-434.
22. Hirano Y., **1979**: Optimum design of laminated plates under shear. *J. Composite Mat.*, v.13, 329-334.
23. Hirano Y., **1979**: Optimum design of laminated plates under axial compression. *AIAA Journal*, v.17, 1017-1019.
24. Hu H.-T., Ho M.-H., **1996**: Influence of geometry and end conditions on optimal fundamental natural frequencies of symmetrically laminated plates. *J. Reinf. Plastics and Comp.*, v.15, 877-893.
25. Ishikawa T., Fukunaga H., **1986**: Tailored laminates with null or arbitrary coefficient of thermal expansion. *Proc. of Composites'86: Recent Advances in Japan and the USA*. Tokyo, 1986.
26. Joshi M. G., Biggers S. B., **1996**: Thickness optimization for maximum buckling loads in composite laminated plates. *Composites Part B*, v.27B, 105-114.
27. Kandil N., Verchery G., **1988**: New methods of design for stacking sequences of laminates. *Proc. of CADCOMP88, Computer Aided Design in composite Materials 88*, 243-257. Southampton, UK.
28. Kandil N., Verchery G., **1988**: Nouvelles méthodes de conception des empilements des stratifiés. *Comptes rendus du Congrès JNC 6 (6èmes Journées Nationales sur les Composites)*, 891-902.
29. Kandil N., Verchery G., **1990**: Design of stacking sequences of laminated plates for thermoelastic effects. *Proc. of the 2nd Int. Conf. On Computer Aided Design in Composite Materials Technology*, Brussels. Ed. W. P. De Wilde & W. R. Blain. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 565-576.
30. Kere P., Koski J., **2001**: Design optimization of composite laminates for multiple loading conditions with an interactive descent algorithm. *Proc. of ICCM 13 (Thirteenth International Conference on Composite Materials)*, papier 1600. Pékin, Chine, 25-29 juin 2001.
31. Khot N. S., Venkayya V. B., Johnson C. D. & Tischler V. A., **1973**: Optimization of fiber reinforced composite structures. *Int. J. Solids Str.*, v.9, 1225-1236.
32. Khot N. S., Venkayya V. B. & Berke L., **1976**: Optimum design of composite structures with stress and displacement constraints. *AIAA Journal*, v.14, 131-132.
33. Kim C. W., Hwang W., Park H. C. & Han K. S., **1997**: Stacking sequence optimization of laminated plates. *Composite Structures*, v.39, 283-288.
34. Kogiso N., Watson L. T., Gürdal Z. & Haftka R. T., **1994**: Genetic algorithms with local improvement for composite laminate design. *Struct. Opt.*, v.7, 207-218.
35. Le Riche R., Haftka R. T., **1993**: Optimization of laminate stacking sequence for buckling load maximization by genetic algorithm. *AIAA Journal*, v.31, 951-956.
36. Le Riche R., Gaudin J., **1998**: Design of dimensionally stable composites by evolutionary optimization. *Composite Structures*, v.41, 97-111.
37. Liu B., Haftka R. T., Akgün M; A. & Todoroki A., **2000**: Permutation genetic algorithm for stacking sequence design of composite laminates. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v.186, 357-372.
38. Lombardi M., Haftka R. T., **1998**: Anti-optimization technique for structural design under load uncertainties. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* V.157, 19-31.
39. Massard T. N., **1984**: Computer sizing of composite laminates for strength. *J. Reinf. Plastics and Comp.*, v.3, 300-345.
40. Miki M., **1982**: Material design of composite laminates with required in-plane elastic properties. *Proc. of ICCM 4 (Fourth International Conference on Composite Materials)*, Tokio, 1725-731.

# Articles sur les composites (3)

41. Miki M., **1983**: A graphical method for designing fibrous laminated composites with required in-plane stiffness. *Trans. JSCM*, v.9, 51-55.
42. Miki M., **1985**: Design of laminated fibrous composite plates with required flexural stiffness. Recent advances in composites in the USA and Japan, ASTM STP 864, Vinson J. R. and Taya M. Editors, 387-400. Philadelphia, USA.
43. Mota Soares C. M., Mota Soares C. A. & Mateus H. C., **1995**: A model for the optimum design of thin laminated plate-shell structures for static, dynamic and buckling behaviour. *Composite Structures*, v.32, 69-79.
44. Muc A., **1995**: Transverse shear effects in shape optimization of thinwalled laminated composite structures. *Composite Structures*, 399-408.
45. Muc A., **1997**: Transverse shear effects in discrete optimization of laminated compressed cylindrical shells. *Composite Structures*, v.38, 489-497.
46. Muc A., Krawiec A., **2000**: Design of composite plates under cyclic loading. *Composite Structures*, v.48, 139-144.
47. Muc A., Gurba W., **2001**: Probabilistic algorithms in optimisation problems for composite plates and shells. *Proc. of ICCM 13 (Thirteenth International Conference on Composite Materials)*, papier 1241. Pékin, Chine, 25-29 juin 2001.
48. Muc A., Gurba W., **2001**: Genetic algorithms and finite element analysis in optimization of composite structures. *Composite Structures*, v.54, 275-281.
49. Nagendra S., Jestin D., Gürdal Z., Haftka R. T. & Watson L. T., **1996**: Improved genetic algorithm for the design of stiffened composite panels. *Comput. Struct.*, v.58, 543-555.
50. Paradies, R., **1996**: Designing quasi-isotropic laminates with respect to bending. *Compos. Sci. Techn.*, v.56, 461-472.
51. Park J. H., Hwang J. H., Lee C. S. et Hwang W., **2001**: Stacking sequence design of composite laminates for maximum strength using genetic algorithms. *Composite Structures*, v.52, 217-231.
52. Park W. J., **1982**: An optimal design of simple symmetric laminates under the first ply failure criterion. *J. Composite Mat.*, v.16, 341-355.
53. Pedersen P., **1993**: Lecture notes on optimal design using anisotropic, non-linear materials. *Workshop on Optimum Structural Design: Analytical Approach and Computer Aided Design*. C. Cinquini editeur, Università di Pavia, Italie, 14-17 septembre 1993.
54. Person V., Vannucci P. & Verchery G., **2002**: Utilisation de la méthode polaire pour la recherche de stratifiés isotropes en membrane. *Comptes rendus du Colloque National de la Recherche Universitaire dans les I.U.T., CNRIUT 2002*. Le Creusot, France, 15-16 mai 2002.
55. Sacchi-Landriani G., Rovati M., **1991**: Optimal design of fiber-reinforced orthotropic bodies. *Comptes Rendus du cours COMETT-CEEC 'Ottimizzazione Strutturale'*. Politecnico di Milano, Italie, 27-31 mai 1991.
56. Sacchi-Landriani G., Rovati M., Taliercio A., **1993**: Optimal orientation of anisotropic properties in continuum bodies. *Workshop on Optimum Structural Design: Analytical Approach and Computer Aided Design*. C. Cinquini editeur, Università di Pavia, Italie, 14-17 septembre 1993.
57. Sadagopan D., Pitchumani R., **1998**: Application of genetic algorithms to optimal tailoring of composite materials. *Compos. Sci. Techn.*, v.58, 571-589.
58. Schmit L. A., Farshi B., **1973**: Optimum laminate design for strength and stiffness. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.7, 519-536.
59. Schmit L. A., Farshi B., **1977**: Optimum design of laminated fibre composite plates. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.11, 623-640.
60. Shin Y. S., Haftka R. T., Watson L. T. & Plaut R. H., **1989**: Design of laminated plates for maximum buckling load. *J. Compos. Mat.*, v.23, 348-369.

# Articles sur les composites (4)

61. Soremekun G., Gürdal Z., Haftka R. T. & Watson L. T., **2001**: Composite laminate design optimization by genetic algorithm with generalized elitist selection. *Computers and Structures*, v.79, 131-143.
62. Soremekun G., Gürdal Z., Kassapoglou C. & Toni D., **2002**: Stacking sequence blending of multiple composite laminates using genetic algorithms. *Composite Structures*, v.56, 53-62.
63. Tabakov P. Y., **2001**: Multi-dimensional design optimisation of laminated structures using an improved genetic algorithm. *Composite Structures*, v.54, 349-354.
64. Tauchert T. R., Adibatla S., **1984**: Design of laminated plates for maximum stiffness. *J. Compos. Mat.*, v.18, 58-69.
65. Todoroki A., Haftka R. T., **1998**: Stacking sequence optimization by a genetic algorithm with a new recessive gene like repair strategy. *Composites Part B*, v.29B, 277-285.
66. Valot E., Verchery G., Akkus N., Vannucci P., Rousseau J. & Aivazzadeh S., **2001**: Ultimate strength of quasi-isotropic laminates in tension: theoretical and experimental analysis. *Proc. of DURACOSYS 2001 - 5th International Conference on durability analysis of composite systems*. Tokyo, Japon, 6-9 novembre 2001.
67. Valot E., **2002**: Anisotropie du comportement a rupture de composites a structure isotrope. Thèse pour l'obtention du titre de docteur de l'Université de Bourgogne. ISAT, Nevers.
68. Valot E., Vannucci P. & Verchery G., **2002**: Complete in-plane elastic characterisation under tensile tests of angle-ply laminates composed of polymer-matrix layers. *Polymers and Polymer Composites*, v.10, 483-492.
69. Valot E., Vannucci P. & Verchery G., **2003**: A linear theory for laminates composed of coupled layers. *Composite Structures*, v. 60, 413-429.
70. Valot E., Vannucci P., **2005**: Some exact solutions for fully orthotropic laminates. A paraître dans *Composite Structures*.
71. Vannucci P., Aivazzadeh S. & Verchery G., **1997**: A comparative analysis of some theories and finite elements for sandwich plates and shells. *Comptes rendus du Colloque Euromech 360: Mechanics of Sandwich Structures*, 45-52. A. Vautrin editeur. St. Etienne, France. Kluwer Academic Publisher, NL.
72. Vannucci P., Gong X. J. & Verchery G., **1998**: Determination des stratifiés quasi-homogènes par l'approche polaire. *Comptes rendus du Congrès JNC 11 (11èmes Journées Nationales sur les Composites)*, 205-214. Arcachon, 18-20 novembre 1998.
73. Vannucci P., Gong X. J. & Verchery G., **1999**: Designing with anisotropy. Part 3: Quasi-homogeneous anisotropic laminates. *Proc. of ICCM 12 (Twelfth International Conference on Composite Materials)*, papier 573. Paris, 5-9 juillet 1999.
74. Vannucci P., Verchery G., **1999**: Designing with anisotropy. Part 2: Laminates without membrane-flexure coupling. *Proc. of ICCM 12 (Twelfth International Conference on Composite Materials)*, papier 572. Paris, 5-9 juillet 1999.
75. Vannucci P., Verchery G., **2000**: Caractérisation de l'isotropie et autres propriétés des stratifiés comme problème de minimum. *Comptes rendus du Congrès JNC 12 (12èmes Journées Nationales sur les Composites)*, 333-342. Cachan, France, 15-17 novembre 2000.
76. Vannucci P., **2001**: On bending-tension coupling of laminates. *J. of Elasticity*, v.64, 13-28.
77. Vannucci P., Verchery G., **2001**: A special class of uncoupled and quasi-homogeneous laminates. *Compos. Sci. Techn.*, v.61, 1465-1473.
78. Vannucci P., Verchery G., **2001**: Stiffness design of laminates using the polar method. *Int. J. Solids Str.*, v.38, 9281-9294.
79. Vannucci P., Verchery G., **2002**: A new method for generating fully isotropic laminates. *Composite Structures*, v. 58, 75-82.
80. Vannucci P., **2002**: A special planar orthotropic material. *J. of Elasticity*, v. 67, 81-96.

# Articles sur les composites (5)

81. Vannucci P., **2005**: Designing the elastic properties of laminates as an optimisation problem: a unified approach based on polar tensor invariants. A paraître dans *International Journal of Structural and Multidisciplinary Optimisation*.
82. Verchery G., **1973**: Les plaques élastiques couplées: leur calcul dans le cas isotrope. Groupe commun de recherche ENSTA – ENSMP *Mécanique des matériaux composites*. Rapport 011, Paris.
83. Verchery G., **1979**: Les invariants des tenseurs d'ordre 4 du type de l'élasticité. *Comptes rendus du Colloque Euromech 115*, Villard-de-Lans. Publié en 1982 par les Editions du CNRS, Paris, 93-104.
84. Verchery G., Vong T. S., **1986**: Une méthode d'aide graphique à la conception des séquences d'empilement dans les stratifiés. *Comptes rendus de JNC5 (5èmes Journées Nationales sur les Composites)*, 267-280. Paris, 9-11 septembre 1986.
85. Verchery G., **1990**: Designing with anisotropy. *Proc. Int. Symp. Composit Materials with Textile Reinforcement for Use in Building Construction and Related Applications*, Lyon, 16-18 juillet 1990. Dans *Textile Composites in Building Construction*, Hamelin P. et Verchery G. Editeurs, Pluralis.
86. Verchery G., **1999**: Designing with anisotropy. Part 1: Methods and general results for laminates. *Proc. of ICCM 12 (Twelfth International Conference on Composite Materials)*, papier 734. Paris, 5-9 juillet 1999.
87. Verchery G., Gong X. J., **1999**: Pure tension with off-axis tests for orthotropic laminates. *Proc. of ICCM 12 (Twelfth International Conference on Composite Materials)*, papier 752. Paris, 5-9 juillet 1999.
88. Verchery G., Vannucci P. & Person V., **2000**: The polar method as a tool for solving inverse problems of the classical laminated plate theory. *Proc. of ISIP 2000 (International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics)*, Nagano, Japon, 7-10 mars 2000. In *Inverse problems in engineering mechanics II*, 317-326. M. Tanaka et G. S. Dulikravich Editeurs. Elsevier Science, UK.
89. Vincenti A., Vannucci P. & Verchery G., **2000**: Découplage et quasi-homogénéité pour les stratifiés renforcés par tissus équilibrés. *Comptes rendus du Congrès JNC 12 (12èmes Journées Nationales sur les Composites)*, 265-274. Cachan, France, 15-17 novembre 2000.
90. Vincenti A., Verchery G. & Vannucci P., **2001**: Anisotropy and symmetries for elastic properties of laminates reinforced by balanced fabrics. *Composites Part A*, v. 32, 1525-1532.
91. Vincenti A., Vannucci P., Verchery G. & Belaïd F., **2002**: Effects of orientation errors on stiffness properties of composite laminates. *Proc. of the 8th Japanese-European Symposium*. Tokio, 16-17 avril 2002.
92. Vincenti A., Vannucci P. & Verchery G., **2003**: Influence of orientation errors on quasi-homogeneity of composite materials. *Composites Science and Technology*, v. 63, pp. 739-749.
93. Vincenti A., **2002**: Conception et optimisation de composites par méthode polaire et algorithmes génétiques. Thèse pour l'obtention du titre de docteur de l'Université de Bourgogne. Isat, Nevers.
94. Walker M., Reiss T. & Adali S., **1997**: Optimal design of symmetrically laminated plates for minimum deflection and weight. *Composite Structures*, v.39, 337-346.
95. Watkins R. I., Morris A. J., **1986**: A multicriteria objective function optimization scheme for laminated composites for use in multilevel structural optimization schemes. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v.60, 233-251.
96. Werren F., Norris C. B., **1953**: Mechanical properties of a laminate designed to be isotropic. *US Forest Products Laboratory*, Report 1841, USA.
97. Wu K. M., **1979**: Isotropic composite plates. *Research Report EM-429*. General Motors Research Laboratories, Warren, Michigan. USA.
98. Wu K. M., Avery B. L., **1992**: Fully isotropic laminates and quasi-homogeneous anisotropic laminates. *J. Composite Mat.*, v.26, 2107-2117.